Université de Bordeaux **2014-2015**
N1 MA3002 Analyse 2

Correction du Devoir Surveillé Terminal du 7/01/2015.

Documents non-autorisés, durée: 3h.

Les exercices (et donc les notations) sont indépendants. Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple) (*).

Exercice 1.

1. *Donner la définition d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Dans le reste de cet exercice, K est supposé compact.*
2. *Donner la définition d'une fonction continue sur K; cette fonction est notée f.*
3. *Enoncer le premier théorème de Weierstrass (portant sur les fonctions continues sur des compacts).*
4. *Donner la définition d'une fonction (application) uniformement continue sur K et enoncer le deuxième théorème de Weierstrass (portant sur la continuité uniforme).*
5. *Donner les exemples mettant en défaut la conclusion du premier théorème de Weierstrass (cf. question 3 ci-dessus) si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et*

   5.1 $A \subset \mathbb{R}^d$ est fermé, mais pas borné;

   5.2 $A \subset \mathbb{R}^d$ est borné, mais pas fermé.

Correction.
1. Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est dit compact, si tout son recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire, pour tout famille d'ouverts $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ telle que $K \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$, il y a un sous-ensemble fini d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tel que $K \subset \cup_{j=1}^n O_{\alpha_j}$.

Dans $\mathbb{R}^d$, cette propriété équivaut à des propriétés suivantes: a) toute suite d'éléments de K contient une sous-suite convergente (et, de plus, elle converge vers un élément de K); b) K est fermé et borné.

2. On dit que la fonction $f : K \to \mathbb{R}^{d_1}$ est continue, si, pour tout $x^0 \in K$, on a

$$\lim_{x \to x^0, x \in K} f(x) = f(x^0).$$

D'une manière équivalente, pour tout $\epsilon > 0$, il y a $\delta = \delta(x^0, \epsilon)$ tels que pour tout $x \in K$ et $||x - x^0|| < \delta$, on a $||f(x) - f(x^0)|| < \epsilon$.

3. Le premier théorème de Wejerstrass dit que si $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, et f est continue sur K, alors $f(K)$ est aussi compact.

Une autre formulation dit que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée sur K et, de plus

$$\sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x) = f(x_{max}),$$

$$\inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x) = f(x_{min}),$$

où x_{max} et x_{min} sont certains points de K.

4. On dit que la fonction $f : K \to \mathbb{R}^{d_1}$ est uniformément continue, si pour tout $\epsilon > 0$, il y a $\delta = \delta(\epsilon)$ tels que pour tous $x, y \in K$ et $||x-y|| < \delta$, on a $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$. La différence par rapport à la définition de (2) est ce que δ ne dépend des points $x, y \in K$.

Le deuxième théorème de Wejerstrass dit que toute fonction f continue sur un compact K, est nécessairement uniformément continue.

5.1. Soit $A = \mathbb{R}$ et $f(x) = \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \arctan x = \pi/2, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} \arctan x = -\pi/2,$$

mais les valeurs $\pm\pi/2$ ne sont pas atteintes.

5.2. Soit $A =]-1,1[$, $f(x) = x$. Nous avons, une fois de plus

$$\sup_{x\in A} x = 1, \quad \inf_{x\in A} x = -1,$$

mais ces valeurs ne sont pas atteintes pas la fonction f sur A.

Exercice 2. *Soit*

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-3y^4}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Citer le résultat du cours sur l'appartenance d'une application à la classe C^1.*
2. *Montrer que h est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$ et y calculer sa différentielle.*
3. *Montrer que h est différentiable au point $(0,0)$ et y calculer sa différentielle.*
4. *La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$? Sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?*
5. *Enoncer le résultat du cours sur l'égalité des derivées partielles mixtes d'ordre supérieur (= le théorème de Clairaut).*
6. *Calculer les derivées $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq 0$. Peut-on appliquer le résultat de la question 5 à ces derivées sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$? Au point $(0,0)$?*
7. *L'application h est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$? Sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?*

Correction.

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. L'application f est de classe C^1 sur le domaine O si et seulement si toutes les dérivées partielles $\partial f/\partial x_j,\ j = 1, \ldots, d$, sont définies est continues sur O.

2. Soit $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ pour abréger les notations. Sur $\mathbb{R}^{2*}$, la fonction h est donnée par un quotient de deux polynômes, et le polynôme au dénominateur n'est pas égal à zéro sur le domaine en question. Comme les polynômes sont différentiables, il est de même pour h. La formule de la dérivation d'un quotient donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4-3y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^5+2x^3y^2+3xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{-12y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4-3y^4)}{(x^2+y^2)^2} = -2\frac{3y^5+yx^4+6y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

où on suppose bien évidemment $(x, y) \neq (0,0)$. En particulier,

$$Dh(x,y)\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\, l + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\, k.$$

3. Calculons d'abord les dérivées partielles $(\partial h/\partial x)(0,0)$ et $(\partial h/\partial y)(0,0)$. Notons, qu'en soi-même l'existence de ces dérivées partielles n'implique pas la différentiablité de h au point $(0,0)$. La différentiabilité en question nécessite une étude plus poussée, cf. ci-dessous.

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{h(x,0)-h(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{x^4}{x^3} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0, y\neq 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0, y\neq 0} \frac{-3y^4}{y^3} = 0. \end{aligned}$$

En revenant à la question 2., on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0,$$

par conséquent les dérivées partielles $(\partial h/\partial x)$ et $(\partial h/\partial x)$ sont continues au point $(0,0)$, au voisinage de $(0,0)$ et donc par l'application de question 1, l'application h y est de classe C^1 et, en particulier, différentiable.

Nous venons de démontrer, entre outre, que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

4. La réponse a cette question se trouve toute à la fin de la question précédente - l'application h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et, en partculier, sur $\mathbb{R}^{2*}$.

5. Nous donnons le théorème de Clairaut pour les dérivées partielles d'ordre 2; la formulation pour les dérivées partielles d'ordre arbitraire est analogue. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Supposons que toute les dérivées partielles $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)$, $j, k = 1, \ldots, d$, sont continues sur O. Alors les valeurs de ces dérivées ne dépendent pas de l'ordre de la dérivation, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

sur O.

6. Sur $\mathbb{R}^{2*}$, le calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= 2\left(\frac{(4x^3y+12xy^3)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\,2y\,(x^5+2x^3y^2+3xy^4)}{(x^2+y^2)^4}\right) \\ &= \frac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} &= -2\left(\frac{(4x^3y+12y^3x)(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\,2x\,(3y^5+yx^4+6y^3x^2)}{(x^2+y^2)^4}\right) \\ &= \frac{16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

On constate que ces dérivées sont continues sur $\mathbb{R}^{2*}$, et, par le téorème de Clairaut, elles doivent être égales sur cet ensemble. Ceci est confirmé par les calculs que-l-on vient d'effectuer.

Le calcul analogue à celui de la question 3. montre que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

D'autre part, les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)$$

n'existent pas et donc le théorème de Clairaut n'est pas applicable au voisinage du point (0,0).

6. Par les résultats énoncés précédemment, on a $h \in C^2(\mathbb{R}^{2*})$. Il est faux que h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, car les dérivées mixtes d'ordre 2 ne sont pas continues au point (0,0).

Exercice 3. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, et $f : O \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2(O)$.*

1. *Enoncer la formule de Taylor de degré 2 pour l'application f au point $x^0 \in O$. Donner l'expression du reste intégral de cette formule.*

2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par $f(x,y) = \sin(xy)$. Cette fonction appartient-elle à la classe $C^2(\mathbb{R}^2)$?*

3. *Donner la formule de Taylor de degré 2 pour la fonction f au point $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.*

4. *Le point (x_0, y_0) est-il critique pour f? Peut-on conclure qu'il est extrémal à partir de la question 3? A l'aide d'un autre raisonnement? Justifiez (cf. (*)).*

Correction.
1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, $f : O \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2(O)$, et $x^0 \in O$. La formule de Taylor au point x^0 s'écrit comme

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + Df(x^0)\, h + \frac{1}{2}(D^2 f(x^0)h, h) + R_2(f, x^0, h), \qquad (*)$$

où le reste $R_2(f, x^0, h)$ s'écrit (sous une forme intégrale) comme suit

$$R_2(f, x^0, h) = \int_0^1 (1-s)((D^2 f(x+sh) - D^2 f(x))h, h)\, ds = h^t \int_0^1 (1-s)(D^2 f(x+sh) - D^2 f(x))\, ds\, h,$$

et on suppose que l'intérvalle $[x^0, x^0 + h] \subset O$.

2. La fonction $f(x,y) = \sin(xy)$ appartient clairement à la classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ car composée des applications de classe C^∞.

3. Calculons les objets dont on a besoin pour la formule $(*)$ citée ci-dessus:

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{bmatrix} y\cos xy, x\cos xy \end{bmatrix}, \\ D^2(x,y) &= \begin{bmatrix} -y^2 \sin xy & -xy\, \sin xy + \cos xy \\ -xy\, \sin xy + \cos xy & -x^2 \sin xy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En prenant $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, on obtient

$$\begin{aligned} Df(x_0,y_0) &= \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix}, \\ D^2(x_0,y_0) &= -\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La formule de Taylor recherchée a la forme suivante

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = 1 + \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} h_1, h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + R_2(f, (x_0, y_0), (h_1, h_2)).$$

4. Oui, le point $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ est critique pour f, car $Df(x_0, y_0) = 0$. Pour appliquer la condition suffisante d'un extrémum local, il faut calculer la signature de $D^2f(x_0, y_0)$; cette signature est (-1,0) (il y a une valeur propre égale à 0), et on ne peut pas conclure grâce à cette condition suffisante.

Par contre, on peut observer que $f(x, y) \leqslant 1$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x_0, y_0) = 1$ et donc le point en question est nécessairement un maximum local.

Exercice 4. *Soient*

$$\begin{aligned} v(x,y) &= x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y, \quad u(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3, \\ w(x,y) &= (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

1. *Calculer les points critiques et y préciser le comportement local (maximum local, minimum local, le point selle, etc.) de ces fonctions.*
2. * *Les points extrémaux du point précédent sont-ils locaux ou globaux?*

Correction.
1. Etudions d'abord la fonction $v(x, y)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x + y - 12, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y + x - 3, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1, \end{aligned}$$

les dérivées mixtes sont égales. Le point critique (x, y) est la solution du système

$$2x + y - 12 = 0, \quad 2y + x - 3 = 0,$$

et $(x, y) = (7, 2)$. Ceci est le pt. de minimum local, car la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

est positive.

Passons maintenant à la fonction $u(x, y)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 6xy - 12, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x, \end{aligned}$$

les dérivées mixtes sont égales. Les points critiques (x, y) sont les solutions du système

$$6xy - 12 = 0, \quad 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0,$$

c'est à dire, $z^1 = (2, 1)$, $z^2 = (-2, -1)$, $z^3 = (1, 2)$ et $z^4 = (-1, -2)$. Les matrices hessiennes respectives sont

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de voir que les deux premières matrices ont les signatures (1,-1) (et les points z^1 et z^2 sont donc des points selles), la troisième matrice est définie positive (z^3 est donc le pt. de minimum local), et la quatrième est définie négative (z^4 est donc le pt. de maximum).

Quant à la fonction $w(x,y)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= (16x-6y)\exp(2x+3y)+2(8x^2-6xy+3y^2)\exp(2x+3y),\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= (6y-6x)\exp(2x+3y)+3(8x^2-6x+3y^2)\exp(2x+3y),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= (32x-12y+16)\exp(2x+3y)+2(16x^2-12xy+6y^2+16x_6y)\exp(2x+3y),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= (-18x+18y+6)\exp(2x+3y)+3(24x^2-18xy+9y^2+6y-6x)\exp(2x+3y),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= (-12x+12y-6)\exp(2x+3y)+3(16x^2-12xy+6y^2+16x-6y)\exp(2x+3y),
\end{aligned}$$

les dérivées mixtes sont égales. Les points critiques (x,y) sont les solutions du système

$$(16x-6y)+2(8x^2-6xy+3y^2)=0, \quad (6y-6x)+3(8x^2-6x+3y^2)=0,$$

c'est à dire, $z^1=(0,0)$, $z^2=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$. L'étude similaire au cas précédents montre que z^1 est le minimum local, et z^2 est le maximum local.

2. Pour $v(x,y)$, le minimum local est aussi global car le graphe de la fonction représente un paraboloïde. Pour $u(x,y)$, les extréma locaux ne sont pas globaux, car

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^2} u(z)=+\infty, \quad \inf_{z\in\mathbb{R}^2} u(z)=-\infty.$$

Pour $w(x,y)$, le point de minimum est le minimum global, car

$$\inf_{z\in\mathbb{R}^2} w(x,y)=0.$$

Par contre, le maximum n'est pas global, car

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^2} w(x,y)=+\infty.$$

Exercice 5. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction $\phi(x,y)=\sin x+f(\sin y-\sin x)$ satisfait la relation*

$$\cos y\,\frac{\partial\phi}{\partial x}+\cos x\,\frac{\partial\phi}{\partial y}=\cos x\cos y.$$

Correction. Sous les hypothèses de l'exercice la fonction ϕ est de classe $D^1(\mathbb{R}^2)$, et les dérivées que nous allons écrire sont bien définies. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \cos x+f'(\sin y-\sin x)\,(-\cos x),\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= f'(\sin y-\sin x)\,(\cos y).
\end{aligned}$$

On multiplie la première égalité par $(\cos y)$, la deuxième par $(\cos x)$ et on obtient l'égalité demandée en les additionnant.

Exercice 6. *Soit $O\subset\mathbb{R}^d$ un domaine et $F:O\to\mathbb{R}^{d_2}$ une application définie là-dessus.*

1. *Donner la définition de la différentiabilité de F en un point $x^0 \in O$ et sur O tout entier.*

2. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ une application linéaire symétrique. On identifie cette application avec sa matrice $d \times d$, notée A; cette matrice est donc aussi symétrique, $A = A^t$, où $(.)^t$ es la transposée. Considérons l'application*
$$F(x) = (Ax, x)^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
où $(.,.)$ est le produit scalaire usuel. En utilisant la question précédente, étudier la différentiabilité de F et donner sa différentielle.

   Indication: Posez $f(x) = (Ax, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $g(y) = y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Etudiez d'abord la différentiabilité de f et g en utilisant la définition de la question 1.

3. *Soit $O_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $O_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ des domaines et $f : O \to O_1$, $g : O_1 \to O_2$ des applications différentiables. Enoncer le théorème sur la différentiabilité de l'application composée*
$$F(x) = g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in O$$
et donner la formule pour sa différentielle.

4. *Soit, une fois de plus, $f(x) = (Ax, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $g(y) = y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Calculer les différentielles de f et g en utilisant les derivées partielles (ou la derivée).*

5. *Retrouver le résultat de la question 2 à l'aide des question 3, 4.*

Correction.
1. Avec les hypothèses de l'exercice, l'application F est différentiable au point $x^0 \in O$, si pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ (de longueur suffisamment petit)
$$F(x^0 + h) = F(x^0) + A_{x^0} \cdot h + R(f, x^0, h),$$
où $A_{x^0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_2}$ est une application linéaire (et donc continue) notée $DF(x^0)$, la différentielle de F au point x^0. $R(f, x^0, h)$ est le reste et il satisfait la condition suivante
$$\lim_{h \to 0} \frac{||R(f, x^0, h)||}{||h||} = 0. \qquad (+)$$
On dit que F est différentiable sur tout O, si cette définition a lieu pour tout point x^0 de O.

2. En utilisant la symétrie de la matrice A, nous avons
$$\begin{aligned} f(x+h) &= (A(x+h), (x+h)) = (Ax, x) + (Ax, h) + (Ah, x) + (Ah, h) \\ &= (Ax, x) + 2(Ax, h) + (Ah, h) \\ &= f(x) + Df(x) \cdot h + R(f, x, h). \end{aligned}$$
En particulier, $Df(x) \cdot h = 2(Ax, h) = 2\, x^t Ah$; il est aussi facile de voir que le reste $R(f, x, h) = (Ah, h)$ satisfait la condition $(+)$. On le note R pour la simplicité de notation.

En faisant le calcul similaire pour $F(x) = f(x)^2 = (Ax, x)^2$, on obtient (rappelons-nous que $(y^2)' = 2y$)
$$\begin{aligned} F(x+h) &= ((Ax, x) + 2(Ax, h) + R)^2 \\ &= (Ax, x)^2 + 4(Ax, h)^2 + R^2 + 4(Ax, x)(Ax, h) + 2(Ax, x)R + 4(Ax, h)R \\ &= (Ax, x)^2 + 4(Ax, x)(Ax, h) + \tilde{R}, \end{aligned}$$
où
$$\tilde{R} = 2(Ax, x)R + 4(Ax, h)R + 4(Ax, h)^2 + R^2$$

satisfait la condition $(+)$.

3. Si $f \in D(O, O_1)$ et $g \in D(O_1, O_2)$, alors, sous les hypothèses énoncées, l'application composée $g \circ f$ est différentiable ($g \circ f \in D(O, O_2)$), et

$$D(g \circ f) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

4. Dans notre cas, $f(x) = (Ax, x)$ et $g(y) = y^2$. Les conditions de la différentiabilité sont bien évidemment satisfaites. Pour g, sa dérivée partielle est sa dérivée "habituelle", $g'(y) = 2y$. En particulier, $Dg(f(x)) = 2(Ax, x)$.

L'application f s'écrit comme

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

et, d'un coup,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

5. On constate que le résultat de la question 2. découle immédiatement des résultats des questions 3, 4.

FIN