Correction du sujet de MA3002, Analyse 2 du 5/01/2012.

Exercice 1

1) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ des domaines et $f : \Omega \to \Omega_1$, $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^{d_2}$ des applications différentiables ($f \in \mathcal{D}(\Omega, \Omega_1)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{R}^{d_2})$). Alors l'application composée $F(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$, $x \in \Omega$, est différentiable ($g \circ f \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{d_2})$) et

$$\underline{\mathcal{D}\, g\circ f\,(x) = \mathcal{D}g(f(x)) \cdot \mathcal{D}f(x).}$$

2) On a

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Psi \qquad & \qquad \Psi \\ y &\longrightarrow \langle y, y\rangle = y^t \cdot y. \end{aligned}$$

(où $(.)^t$ est le transposé). Donc :

$$g(y+h) = \langle y+h, y+h\rangle = \langle y,y\rangle + \langle y,h\rangle + \langle h,y\rangle + \langle h,h\rangle =$$
$$= \langle y,y\rangle + 2\langle y,h\rangle + \langle h,h\rangle = g(y) + \underbrace{\mathcal{D}g(y)\cdot h}_{\shortparallel\; 2\langle y,h\rangle = 2y^t\cdot h} + \underbrace{R_y(h)}_{\shortparallel\; \langle h,h\rangle}.$$

Il est facile de voir que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|R_y(h)|}{\|h\|} = 0$. Par conséquent, l'application g est différentiable et

$$\underline{\mathcal{D}g(y)\cdot h = 2\langle y,h\rangle.}$$

(la différentielle).

3). On fait le calcul par la définition (et on admet donc la 2ième partie de la question -

- L'idée est ce que la réponse obtenue doit être la même). Donc :

$$F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle = f(x)^t \cdot f(x),$$

et

$$F(x+h) = \langle f(x+h), f(x+h) \rangle = \langle \underbrace{f(x)}_{=F(x)} + \mathcal{D}f(x)\cdot h + R(f,h),$$

$$f(x) + \mathcal{D}f(x)\cdot h + R(f,h) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(x), \mathcal{D}f(x)\cdot h \rangle +$$

$$+ \underbrace{\langle \mathcal{D}f(x)\cdot h, f(x) \rangle}_{\mathcal{D}F(x)\cdot h} + \underbrace{\langle \mathcal{D}f(x)\cdot h + R(f,h), \mathcal{D}f(x)\cdot h + R(f,h) \rangle}_{R_1(F,h)}.$$

On obtient alors

$$\mathcal{D}F(x)\cdot h = 2\langle f(x), \mathcal{D}f(x)\cdot h \rangle = 2 f(x)^t \cdot \mathcal{D}f(x)\cdot h.$$

et on constate que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|R_1(F,h)|}{\|h\|} = 0$;

$R_1(F,h)$ est donc le reste.

Exercice 2 Soit

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq 0 \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

1). La continuité : F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (car $x^2+y^2 \neq 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et c'est un quotient des fonctions continues). $(0,0)$ est le seul pt. où la continuité doit être étudiée :

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin x^3}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0.$$

La fonction est donc continue au pt. $(0,0)$.

2) Calculons $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\cos(x^3) \cdot 3x^2 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot \sin(x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin(x^3) \cdot \left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right).$$ Pour $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{F(0,y) - F(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

---

3). On pouvait essayer d'appliquer le critère de la différentiabilité démontré ds le cours : si $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \in C(\Omega)$, alors $F \in C^1(\Omega)$ (et, par conséquent, $F \in \mathcal{D}(\Omega)$). Ceci marche, bien évidemment, pour $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il nous reste d'étudier le pt. $(0,0)$; le résultat cité n'est pas applicable, car $\frac{\partial F}{\partial x} \notin C((0,0))$. En effet : posons $(x,y) = (t, \alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et vérifions si

$$\lim_{(x,y) \to 0} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 1.$$

On a :

$$\lim_{\substack{(x,y)=(t,\alpha t) \to 0 \\ (t \to 0)}} \frac{\cos t^3 \cdot 3t^2(1+\alpha^2)t^2 - 2t \cdot \sin t^3}{(1+\alpha^2)^2 t^4} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y) \to 0 \\ (t \to 0)}} \frac{(3(1+\alpha^2) - 2)t^4}{(1+\alpha^2)^2 t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{(3(1+\alpha^2) - 2)}{(1+\alpha^2)^2} =$$

$$= \frac{3\alpha^2 + 1}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Pour $\alpha = 2$ la limite est donc $\frac{3 \cdot 4 + 1}{(1+4)^2} = \frac{13}{25} \neq 1$. $\Rightarrow$ pas de continuité.

La différentiabilité au pt. $(0,0)$ s'étudie donc par la définition:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} |F(h) - F(0) - \mathcal{D}F(0)\cdot h| = 0.$$

---

4). Calculons les dérivées partielles d'ordre 2: $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left\{\frac{(\cos x^3 \cdot (3x^4+3x^2y^2) - 2x\cdot \sin x^3)}{(x^2+y^2)^2}\right\}' =$$

$$= \frac{\{3x^2\cdot(-\sin x^3)\cdot(3x^4+3x^2y^2) + \cos x^3(12x^3+6xy^2) - 2\sin x^3 - 6x^2\cdot \cos x^3\}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(\cos x^3(3x^4+3x^2y^2) - 2x\sin x^3)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\left(\frac{2y\sin x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y = -\sin x^3 \cdot \frac{2(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y\sin x^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = -2y\cdot\frac{\cos x^3\cdot 3x^2(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2x\cdot \sin x^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ se calcule pareillement. Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ $((x,y)\neq(0,0))$ sont continues (comme des quotients de fonction continues avec le dénominateur $\neq 0$) et, par conséquent, $F\in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ (ce qui implique, en particulier, $F\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. $(*)$.

Pour la 2-fois différentiabilité au pt. $(0,0)$:
on a démontré à la page 3 que, par exemple, $\frac{\partial F}{\partial x}$ n'est pas continue au pt. $(0,0)$ $\Rightarrow$ donc elle n'est pas différentiable et donc $\mathcal{D}^2F(0,0)$ n'existe pas $\Rightarrow$ $F\notin\mathcal{D}^2((0,0))$. On ne peut donc pas étendre le domaine $(*)$ de la différentiabilité de F.

Exercice 3

Soit $h(x,y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$, $x, y > -1$.

1) Les pts. critiques:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sqrt{1+y} + \frac{y}{2\sqrt{1+x}} \; ; \; \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}.$$

Résolvons:

$$\begin{cases} \sqrt{1+y} + \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} = 0 \\ \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x}\,\sqrt{1+y} + \dfrac{y}{2} = 0 \\ \sqrt{1+x}\,\sqrt{1+y} + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Bigg| -$$

$$\Rightarrow y = x \Rightarrow 1 + x + \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \; ; \; y = -\frac{2}{3}.$$

Pour étudier la nature du pt., calculons l'Hessienne:

$$D^2 h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4}\dfrac{y}{(1+x)^{3/2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & -\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{(1+y)^{3/2}} \end{bmatrix}\Bigg|_{(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \Delta_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{3}{4} - 3 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la matrice est indéfinie et on a le pt. selle.

---

2) Soit $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + xy$.

a) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (même $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) car ceci est un polynôme.

b) $(x_0, y_0) = (0,0)$; donnons le développement de Taylor ds. ce point:

$$f(z_0+h) = f(z_0) + Df(z_0)\cdot h + \frac{1}{2} h^t \cdot D^2 f(z_0)\cdot h + \varepsilon(z_0, h).$$

$z = (x,y)$; $z_0 = (x_0, y_0)$; $z = z_0 + h$. $h = (h_1, h_2)$. $\qquad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|\varepsilon(z_0,h)|}{\|h\|^2} = 0.$

Donc

$$Df(z_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\Bigg|_{(0,0)} = \left[2x + y, y^2 + x\right]\Big|_{0,0} = 0.$$

$$D^2 f(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$f(0+h) = \underset{f(0)}{\underset{\shortparallel}{0}} + \underset{Df(0)}{\underset{\uparrow}{0}} \cdot h + \frac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \varepsilon(h) =$$

$$= (h_1^2 + h_1 h_2) + \varepsilon(h)$$

---

c) Les pts critiques: $Df(z_0) = 0$.

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$ $\rightarrow$ les pts critiques $= (0,0), (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

---

d) Etudions leur nature:

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 0 - 1^2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow D^2 f(0,0)$ n'est pas définie,

$\Rightarrow$ c'est un pt. selle.

$D^2 f(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 2 - 1^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D^2 f(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) > 0$

$\Rightarrow$ c'est un min. local.

---

e) la fonction n'est pas de max/min global, car

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = +\infty \,; \quad \lim_{\substack{y \to -\infty \\ x\text{-fixe}}} f(x,y) = -\infty.$$

Exercice 5. La courbe γ est donnée par $\{(\cos^2(t), \sin^2(t)) : t \in [-\pi, \pi]\}$. Nous avons:

$$l(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\cos^2 t \sin^2 t + 4\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$x'(t) = -2\cos t \cdot \sin t$

$y'(t) = 2 \sin t \cdot \cos t$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t \cdot \cos t|\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} |2\sin t\cos t|\,dt = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin 2t|\,dt =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{0}^{\pi/2}|\sin 2t|\,dt = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = -\frac{4\sqrt{2}}{2}\cdot\left[\cos 2t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{2}(-1-1) = 4\sqrt{2}.$$

Exercice 4. Soit

$$C := \begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

1) Le tableau de variations pour $x'(t), y'(t), x(t), y(t)$:

$x'(t) = 2t$; $y'(t) = 6t^2 + 6t = 6t(t+1)$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) Les branches infinies:

On a $\frac{y(t)}{x(t)} \sim \frac{2t^3}{t^2} = 2t \to \pm\infty$ $(t \to \pm\infty) \Rightarrow$ pour $t \to \pm\infty$, la courbe admet des branches paraboliques en direction Oy. Il n'y a pas d'asymptotes.

3) Les points stationnaires:

$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow t = 0$ est un pt. stationnaire ; $x(0) = -1$; $y(0) = -1$.

On pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\bar{V}_k = \frac{d^k\gamma}{dt^k}(0)$. Le plus petit p t.q. $\bar{V}_p \neq 0$ est le $\bar{V}_2$ $(p=2)$; le plus petit q

t.q. $\{\bar{V}_2, \bar{V}_q\}$ est un système libre est $q=3$.

$\Rightarrow$. le pt $t=0$ est le pt. de rebroussement de 1-ière espèce et la tangente à C ds. ce pt. est dirigée par $\bar{V}_2 = \binom{2}{6}$.

4) Le tracé de la courbe: