Université Bordeaux I **2011-2012**
Analyse 2 (MA3002)

Feuille d'exercices n°5

Exercice 1. On considère la courbe plane d'équation paramétrée

$$x(t) = \frac{t^3}{t-1}, \quad y(t) = \frac{t(t-\frac{3}{4})}{t-1}$$

1. Etudier la courbe en $t = 0$.
2. Même question en $t = \frac{3}{2}$.
Montrer que la courbe admet une tangente en $f(\frac{3}{2})$. En donner la pente.
3. Montrer que la courbe a une branche infinie quand $t \to 1,\ t > 1$ et admet une asymptote. En donner l'équation et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 2. On considère la courbe plane d'équation paramétrée

$$x(t) = te^{\frac{1}{t}}, \quad y(t) = (t-1)e^{-\frac{2}{t}}.$$

1. Montrer que la courbe a des branches infinies quand $t \to \pm\infty$.
2. Montrer que la courbe admet une asymptote quand $t \to \pm\infty$. En donner l'equation et trouver la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 3. Montrer que la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

admet un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

Exercice 4. Donner l'équation cartésienne de la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

Exercice 5. Etudier et tracer les courbes paramétrées définies par

$$a) \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = 3t + \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$$

$$c)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^3 t\\ y(t)=\sin^3 t\end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{1}{1-t^2}\\ y(t)=\dfrac{t^3}{1-t^2}\end{array}\right.$$

On donnera aussi, le cas échéant, les branches infinies et leur position relative.

Exercice 6. Etudier et tracer les courbes définies par les équations polaires suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) & r^2(\phi)=\cos(2\phi), & b) & r(\phi)=\dfrac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{\sin(\phi)-\cos(\phi)},\\ c) & r(\phi)=1+\cos(\phi), & d) & r(\phi)=\dfrac{1}{\cos(\phi)},\\ e) & r(\phi)=\dfrac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}, & f) & r(\phi)=\sin(\phi)\cos^2(\phi). \end{array}$$

On essayera de toujours donner les abscisses et ordonnées minimales et maximales. Dans le cas où la dérivée de $x(\phi)$ et de $y(\phi)$ s'annulent en même temps, on fera un développement limité de ses quantités afin de tracer au mieux la courbe paramétrée.

Exercice 7. Calculer la longueur des courbes :

$$\begin{array}{ll} a) & t\mapsto (t,\cos(t),\sin(t)),\ \text{pour } t\in[-\pi,\pi],\\ b) & t\mapsto (t,\cosh(t),\sinh(t)),\ \text{pour } t\in[-1,1],\\ c) & t\mapsto (\cos^3(t),\sin^3(t)),\ \text{pour } t\in[-\pi,\pi]. \end{array}$$

Donner l'abscisse curviligne de ces trois courbes.

Exercice 8. a) Démontrer que la longueur d'une courbe polaire, de classe $\mathcal{C}^1$, est donnée par

$$l(\alpha,\beta):=\int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\phi))^2+(r'(\phi))^2}\,d\phi.$$

b) Montrer que la longueur de la cardioide, courbe c) de l'exercice 6) pour $\theta\in[0,2\pi]$, est 8.
c) Montrer que son abscisse curviligne est donnée par $s(\phi)=4\sin(\phi/2)$.

Exercice 9. La *courbure* est définie comme la norme du vecteur accélération d'un mobile parcourant une courbe à vitesse constante égale à 1. En d'autres termes, c'est la dérivée seconde par rapport à l'abscisse curviligne de la position du mobile.

a) Soit une courbe plane en coordonnées paramétriques dans un repère orthonormé donnée par $t \mapsto (x(t), y(t))$, montrer que la courbure est :

$$\gamma(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

b) Soit une courbe paramétrée par l'abscisse cartésienne $x \mapsto y(x)$, montrer que la courbure est :

$$\gamma(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}}.$$

c) Soit une courbe exprimée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$, montrer que la courbure est :

$$\gamma(\theta) = \frac{\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)}{\left(\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)\right)^{3/2}}.$$

Exercice 10. On étudie la spirale d'Archimède de paramètre $a > 0$. En coordonnées polaires (ρ, θ), elle est donnée par $\rho(\theta) = a\theta$.
a) Etudier les variations de la courbe et tracer-la.
b) Calculer la courbure γ de la spirale.
c) Montrer que ρ et $1/\gamma$, sont équivalents en $+\infty$.