Correction du devoir surveillé terminal, le 12/05/2015.

NB : *pour une surface orientable Γ donnée, dS désigne la mesure surfacique standard (appelé aussi l'élément de surface infinitésimal) ; le vecteur $\bar{n}$ est le vecteur normal à Γ de longueur unité qui définit l'orientation de la surface en question.*

Exercice 1. *Soit $O \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $Z : O \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 donnée par*

$$O \ni w = (u,v) \ \longmapsto \ Z(w) = Z(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $\Gamma = Z(O)$, la surface orientable donnée sous une forme paramétrique par l'application Z.

(1) *Soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable définie sur Γ. Donner la définition de l'intégrale surfacique*

$$\int_\Gamma f\, dS$$

de 1-ière espèce.

(2) *Soit $F = (P, Q, R) : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel mesurable définie sur Γ. Donner la définition de l'intégrale surfacique*

$$\int_\Gamma (F, \bar{n})\, dS = \int_\Gamma (P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy)$$

de 2-ière espèce.

(3) *Soit maintenant $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière de classe C^1 par morceaux. Soit $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel définie sur $\bar{\Omega}$ tel que $F \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Enoncer la formule de Gauss-Ostrogradski (appelé aussi la formule de Green-Ostrogradski, ou la formule de divergence) pour le champ F sur Ω.*

Correction.
(1) Le vecteur normal à la surface Γ définie par la paramétrisation Z est donné par

$$\bar{N} = \pm \det \begin{bmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}. \qquad (**)$$

Ci-dessus, les vecteurs e^j, $j = 1, 2, 3$, sont des vecteurs de base standard de $\mathbb{R}^3$ (aussi notés i, j, k). Par conséquent, la mesure surfacique standard est

$$dS = ||\bar{N}||\, dudv,$$

et elle ne dépend pas du choix de signe dévant la normale $\bar{N}$. Par définition, nous avons

$$\int_\Gamma f\, dS = \int_O f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, ||\bar{N}(u,v)||\, dudv.$$

(2) Supposons maintenant que $\bar{N} \neq 0$, où $\bar{N}$ est défini ci-dessus. Soit l'orientation de la surface Γ en question correspond au choix de signe "+" dans la formule $(**)$; nous tenons à ce choix de signe pour le reste de la question. Considérons le vecteur normal de longueur unité, i.e. $\bar{n} = \bar{N}/||\bar{N}||$. L'intégrale surfacique de 2-ième espèce est définie comme

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (F, \bar{n})\, dS &= \int_O \left(\begin{bmatrix} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{bmatrix}, \bar{n}(u,v) \right) ||\bar{N}||\, dudv \\ &= \int_O \left(\begin{bmatrix} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{bmatrix}, \bar{N}(u,v) \right) dudv. \end{aligned}$$

Ci-dessus $(.,.)$ est le produit scalaire (euclidien) dans $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit maintenant $\bar{n}$ le vecteur normal de longueur unité extérieur à Ω. Avec les notations introduites dans les points précédents, la formule de Gauss-Ostrogradski (Green-Ostrogradski) s'écrit comme

$$\int_\Gamma (F, \bar{n})\, dS = \int_\Omega divF\, dxdydz = \int_\Omega (\nabla, F)\, dxdydz.$$

Exercice 2. *(théorème de Fubini)*

(1) *(Question de cours). Pour la simplicité, soit* $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ *un rectangle dans* $\mathbb{R}^2$, $a < b, c < d$, *et* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable la-dessus. Enoncer le théorème de Fubini pour l'intégrale*

$$\int_\Pi f(x,y)\, dxdy.$$

Le reste de l'exercice traite d'un exemple qui ne satisfait pas les hypothèse de ce théorème. Soit

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \Pi =]0,1]\times]0,1].$$

(2) *Calculez l'intégrale double*

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Montrez notamment que

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{1+x^2}, \quad I_1 = \frac{\pi}{4},$$

indication : faites le changement de variable $t = y/x$ *dans la première intégrale ci-dessus.*

(3) *Calculez l'intégrale double*

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Montrez notamment que

$$\int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{1}{1+y^2}, \quad I_2 = -\frac{\pi}{4},$$

indication : faites le changement de variable $s = x/y$ *dans la première intégrale ci-dessus.*

(4) *Le théorème de Fubini est-il valide pour* $\int_\Pi f(x,y)\, dxdy$ *(cf. la question suivante) ?*

(5)* *En passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale* $\int_\Pi |f(x,y)|\, dxdy$ *ne converge pas.*

Correction.

(1) Le théorème de Fubini a la formulation suivante : si, sous les hypothèses énoncées, l'une des intégrales

$$\int_\Pi |f(x,y)|\, dxdy, \quad \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\, dy \right) dx, \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

est convergente (finie), alors les autres le sont aussi, et, de plus

$$\int_\Pi f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

(2) Effectuons le changement de variable $s = y/x$; nous avons alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y)\, dy &= \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\, ds \\ &= \frac{2}{x} \int_0^{1/x} \frac{ds}{(1+s^2)^2} - \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{ds}{(1+s^2)}. \end{aligned}$$

La primitive $\displaystyle\int \frac{ds}{(1+s^2)}$ est $\arctan s$, et pour la première intégrale on a

$$\int_0^y \frac{ds}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y^2+1} + \arctan y\right).$$

On obtient donc

$$\frac{2}{x}\int_0^{1/x} \frac{ds}{(1+s^2)^2} - \frac{1}{x}\int_0^{1/x} \frac{ds}{(1+s^2)} = \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \pi/4$$

(3) Le calcul est similaire ; la seule différence est le changement de variable $s = x/y$, et donc

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1/y} \frac{s^2-1}{(1+s^2)^2}\,ds\right)dy = -I_1 = -\pi/4.$$

(4) On constate que le changement d'ordre d'intégration dans l'intégrale donnée ne produit pas la même valeur numérique.

(5) Le pt. précédent ne contredit pas le théorème de Fubini, car l'intégrale $\int_\Pi |f(x,y)|\,dxdy$ n'est pas convergente. En effet, soit $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \ 0 < x \le 1,\ 0 < y \le 1\}$ (i.e., D est l'intérsection du disque unité centré au pt. $(0,0)$ avec le premier quadrant du plan). On a $D \subset \Pi$ et $\int_\Pi |f(x,y)|\,dxdy$ converge (est finie) ssi $\int_D |f(x,y)|\,dxdy$ converge. Or, en faisant le changement de variables polaire ($x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$), on obtient

$$\begin{aligned}\int_D |f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{r^3|\cos(2\phi)|}{r^4}\,d\phi\right)dr \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} |\cos(2\phi)|\,d\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{dr}{r}\,dr\right) = \infty.\end{aligned}$$

Exercice 3.

(1) *(Question de cours) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de frontière de classe C^1 par morceaux. Posons $\gamma = \partial\Omega$. Soit $F = (P,Q) : \bar\Omega \to \mathbb{R}^2$ un champs vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$. Enoncer la formule de Green (appelé aussi la formule de Green-Ostrogradski (sur $\mathbb{R}^2$)) pour F sur Ω.*

(2) *Soit F le champ vectoriel défini par*

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y) = ((x+y)^2, -(x^2+y^2)),$$

et Ω le triangle de sommets $(1,1),(3,2)$ et $(2,3)$.

Appliquer la formule de Green pour calculer l'intégrale curviligne de 1-ière espèce

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Correction.

(1) Supposons que $\gamma = \partial\Omega$ est parcourue dans le sense positif (i.e., en sorte que le domaine Ω reste à gauche par rapport au sense du parcours). Alors, sous les hypothèses énoncées, on a

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2) Nous avons

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y),$$

et donc, par la formule de Green (Green-Ostrogradskii)

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Omega (-4x-2y)\ dxdy,$$

où Ω est le triangle en question. La dernière intégrale se calcule comme une intégrale double. Notons que les arrêts du triangle Ω sont : a) l'arrêt allant de $(1,1)$ à $(3,2)$ est donné par $\{(x,y) : 1 \le x \le 3, y = \frac{1}{2}(x-1)+1 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\}$; b) l'arrêt allant de $(1,1)$ à $(2,3)$ est donné par $\{(x,y) : 1 \le x \le 2, y = 2(x-1)+1 = 2x-1\}$; c) l'arrêt allant de $(2,3)$ à $(3,2)$ est donné par $\{(x,y) : 2 \le x \le 3, y = -(x-3)+2 = -x+5\}$. L'intégrale double s'écrit donc comme

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-4x-2y)\ dxdy &= -2\int_\Omega (2x+y)\ dxdy \\
&= -2\int_1^2 \left(\int_{x/2+1/2}^{2x-1} (2x+y)dy\right) dx - 2\int_2^3 \left(\int_{x/2+1/2}^{-x+5} (2x+y)dy\right) dx \\
&= -2\int_1^2 \left[2xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x/2+1/2}^{y=2x-1} dx - 2\int_2^3 \left[2xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x/2+1/2}^{y=-x+5} dx \\
&= -\frac{50}{8} - \frac{82}{8} = -\frac{33}{2}.
\end{aligned}$$

et le résultat numérique indiqué s'obtient après l'intégration simple et élémentaire.

Exercice 4.

(1) *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par $f(x,y,z) = xy + 2yz$, et*

$$\Gamma = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Dessiner la surface Γ et calculer $\int_\Gamma f\,dS$, l'intégrale surfacique de 1-ière espèce.

(2) *Soit maintenant $F = (P,Q,R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champs vectoriel donné par*

$$P(x,y,z) = x-y, \quad Q(x,y,z) = y-x, \quad R(x,y,z) = z.$$

Calculer

$$\int_\Gamma (F,\bar{n})\,dS = \int_\Gamma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$$

l'intégrale surfacique de 2-ième espèce. Ci-dessus, le vecteur $\bar{n}$ est la normale supérieure à la surface Γ. Indication : envisagez d'utiliser le changement des coordonnées polaires pour calculer les intégrales dans $\mathbb{R}^2$.

Correction.

(1) La surface Γ est le cône de rotation par rapport à l'axe OZ (i.e., la section de Γ par le plan horisontale (si elle n'est pas vide) est un cercle) centré au point $(0,0,0)$ et d'ouverture $\pi/2$, cf. le déssin :

En reprenant les définitions de l'Exercice 1, nous avons :

* $\bar{N} = \pm\left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right),$

* $dS = ||\bar{N}||\,dxdy = \left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right)^{1/2} dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$

On pose $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ (i.e., le disque unité centré au point (0,0)). En tenant compte du fait que $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sur la surface Γ, on obtient

$$\int_\Gamma f\,dS \quad = \quad \int_D (xy + 2y\sqrt{x^2+y^2})\,\sqrt{2}\,dxdy.$$

Cette intégrale se calcule par le changement de variables polaire : $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ dxdy = r\,drd\phi$, et, pour $(x,y) \in D$ on a $r \in [0,1], \phi \in [0,2\pi]$. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f\,dS &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(r^2\cos\phi\sin\phi + 2r^2\sin\phi\right)\,r dr\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^3\,dr\right) \\
&+ \ 2\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^3\,dr\right) = 0.
\end{aligned}$$

Le calcul de la valeur numérique de l'intégrale ci-dessus se fait par des moyens élémentaires et ne représente pas de difficulté.

(2) Cette fois-ci le vecteur normal à Γ de longueur unité est donné par

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right).$$

L'intégrale en question s'écrit comme suit (rappelons que $z = \sqrt{x^2+y^2}$) :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (F,\bar{n})\,dS &= \int_D \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} + z\right)\sqrt{2}\,dxdy \\
&= 2\int_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = 2\left(\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^2\,dr\right) = 0,
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables polaire.

Exercice 5. *En utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski (Green-Ostrogradski, de divergence ; cf. Exercice 1), calculer l'intégrale suivante*

$$\int_\Gamma z\,dxdy + (2x+y)z\,dydz, \qquad (*)$$

où Γ est la surface (munie de la normale extérieure) représentant la frontière de la région $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ z \ge 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Faire le dessin de la région Ω.

Correction.
La région Ω est la démi-boule supérieure de rayon $\sqrt{2}$ et centrée au point $(0,0,0)$, cf. le dessin

Le champ vectoriel $F = (P, Q, R)$ de l'intégrale $(*)$ est donné par

$$P = (2x + y)z, \quad Q = 0, \quad R = z.$$

Selon la formule de Gauss-Ostrogradski (Green-Ostrogradski), nous avons (ici, $\Gamma = \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy &= \int_\Gamma (F, \bar{n})\,dS = \int_\Omega divF\,dxdydz \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\,dxdydz.
\end{aligned}$$

Dans notre cas, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1,$$

et, par conséquent, à l'aide du changement de variable sphérique,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (F, \bar{n})\,dS &= \int_\Omega (2z + 1)\,dxdydz = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho\cos\theta + 1)\rho^2 \sin\theta\,d\rho \right) d\phi \right)\,d\theta \\
&= 2\pi \Bigg(\left(\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\,d\rho \right) \\
&+ \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\,d\rho \right) \Bigg) = 2\pi \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right).
\end{aligned}$$

Les intégrales ci-dessus se calculent d'une manière élémentaire et sans difficulté.

FIN