K1 MA4021 Devoir surveillé terminal, le 12/05/2015. 2015

Aide-memoire A4 recto-verso autorisé, durée - 3h.

NB : *pour une surface orientable Γ donnée, dS désigne la mesure surfacique standard (appelé aussi l'élément de surface infinitésimal) ; le vecteur $\bar{n}$ est le vecteur normal à Γ de longueur unité qui définit l'orientation de la surface en question.*

Exercice 1. Soit $O \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $Z : O \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 donnée par

$$O \ni w = (u,v) \longmapsto Z(w) = Z(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $\Gamma = Z(O)$, la surface orientable donnée sous une forme paramétrique par l'application Z.

(1) Soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable définie sur Γ. Donner la définition de l'intégrale surfacique

$$\int_\Gamma f\, dS$$

de 1-ière espèce.

(2) Soit $F = (P, Q, R) : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel mesurable définie sur Γ. Donner la définition de l'intégrale surfacique

$$\int_\Gamma (F, \bar{n})\, dS = \int_\Gamma (P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy)$$

de 2-ière espèce.

(3) Soit maintenant $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière de classe C^1 par morceaux. Soit $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel définie sur $\bar{\Omega}$ tel que $F \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Enoncer la formule de Gauss-Ostrogradski (appelé aussi la formule de Green-Ostrogradski, ou la formule de divergence) pour le champ F sur Ω.

Exercice 2. (théorème de Fubini)

(1) (Question de cours). Pour la simplicité, soit $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle dans $\mathbb{R}^2$, $a < b, c < d$, et $f : \Pi \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable la-dessus. Enoncer le théorème de Fubini pour l'intégrale

$$\int_\Pi f(x,y)\, dxdy.$$

Le reste de l'exercice traite d'un exemple qui ne satisfait pas les hypothèse de ce théorème. Soit

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \Pi =]0,1] \times]0,1].$$

(2) Calculez l'intégrale double

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Montrez notamment que

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{1+x^2}, \quad I_1 = \frac{\pi}{4},$$

indication : faites le changement de variable $t = y/x$ dans la première intégrale ci-dessus.

(3) Calculez l'intégrale double

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Montrez notamment que

$$\int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{1}{1+y^2}, \quad I_1 = -\frac{\pi}{4},$$

indication : faites le changement de variable $s = x/y$ dans la première intégrale ci-dessus.

TSVP.

(4) Le théorème de Fubini est-il valide pour $\int_\Pi f(x,y)\,dxdy$ (cf. la question suivante) ?

(5)* En passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale $\int_\Pi |f(x,y)|\,dxdy$ ne converge pas.

Exercice 3.

(1) (Question de cours) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de frontière de classe C^1 par morceaux. Posons $\gamma = \partial\Omega$. Soit $F = (P,Q) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ un champs vectoriel tel que $F \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Enoncer la formule de Green (appelé aussi la formule de Green-Ostrogradski (sur $\mathbb{R}^2$)) pour F sur Ω.

(2) Soit F le champ vectoriel défini par

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y) = ((x+y)^2, -(x^2+y^2)),$$

et Ω le triangle de sommets $(1,1), (3,2)$ et $(2,3)$.

Appliquer la formule de Green pour calculer l'intégrale curviligne de 1-ière espèce

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

Exercice 4.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par $f(x,y,z) = xy + 2yz$, et

$$\Gamma = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Dessiner la surface Γ et calculer $\int_\Gamma f\,dS$, l'intégrale surfacique de 1-ière espèce.

(2) Soit maintenant $F = (P,Q,R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champs vectoriel donné par

$$P(x,y,z) = x - y, \quad Q(x,y,z) = y - x, \quad R(x,y,z) = z.$$

Calculer

$$\int_\Gamma (F,\bar{n})\,dS = \int_\Gamma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$$

l'intégrale surfacique de 2-ième espèce. Ci-dessus, le vecteur $\bar{n}$ est la normale supérieure à la surface Γ. *Indication :* envisagez d'utiliser le changement des coordonnées polaires pour calculer les intégrales dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. En utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski (Green-Ostrogradski, de divergence ; cf. Exercice 1), calculer l'intégrale suivante

$$\int_\Gamma z\,dxdy + (2x+y)z\,dydz,$$

où Γ est la surface (munie de la normale extérieure) représentant la frontière de la région $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 2,\ z \ge 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Faire le dessin de la région Ω.

FIN