Théorème de convergence dominée (=TCD) sur $\mathbb{R}^1$.

EXERCICE 1.

1. Soit g_n une fonction définie sur $]0,1]$ par les relations
$$g_n(x) = n,\ x \in]0, \frac{1}{n}], \quad g_n(x) = 0,\ x \in]\frac{1}{n}, 1].$$
Pour tout $x \in]0,1]$, posons $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Calculer g. La convergence est-elle simple ? monotone ? uniforme ?
2. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx, \qquad \int_0^1 g(x)dx.$$
Le TCD est-il applicable dans cette situation ? Justifiez votre réponse.
3. Soit $f \in C([0,1])$. Démontrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g_n(x)dx = f(0).$$

EXERCICE 2.

1. Soit $0 \leq \alpha < 1$ et
$$f_n(x) = \chi_{I_n} \cdot \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in]0,1],$$
où χ_I est la fonction indicatrice de l'intervalle I et $I_n = [1/(n+1), 1/n]$. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$
Le TCD est-il applicable dans cette situation ?
2. Les mêmes questions pour $\alpha = 1$.

Volume et mesure de Lebesgue. Intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}^d$.

EXERCICE 3. Calculer les airs des régions données par les relations :
- $\{(x,y) : 0 \leq x, x \leq y \leq x+1, y \leq 2\}$,
- $\{(x,y) : 0 \leq x, x^3 \leq y \leq x^2\}$,
- $\{(x,y) : x^2 \leq y \leq x^3, y \leq 8\}$,
- $\{(x,y) : 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

EXERCICE 4. Calculer les volumes des régions données par les relations :
- $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$,
- $z = 0, |x+y| < \pi/2, |x-y| < \pi/2, z = \cos x \cos y$,
- $n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (n+1)pi, z = 0, z = \sin(x^2 + y^2)$,
- $x + y + z = a, 4x + y = a, 4x + 3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0$.

EXERCICE 5. Let $X = [0,a] \times [0,b]$, la partition $(X_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ est donnée par
$$X_{ij} = \left[\frac{ia}{n}, \frac{(i+1)a}{n}\right] \times \left[\frac{jb}{n}, \frac{(j+1)b}{/}n\right]$$

et $(\xi_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ sont les centres de X_{ij}. Calculer les sommes de Riemann

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij})m(X_{ij})$$

et leur limite $\int\int_X f(x)dx$ dans les situations suivantes ($x=(x_1,x_2)$) :

1. $f(x)=px_1+qx_2,\ x\in X,$
2. $f(x)=x_1x_2,\ x\in X,$
3. $f(x)=e^{x_1+x_2}, x\in X.$

EXERCICE 6.

1. Calculer
$$I_1=\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy,$$
où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x,y\geq 0, x+y\leq 1\right\}$.
2. Calculer
$$I_2=\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$$
où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<x, x^2+y^2>y\right\}$.
3. Calculer
$$I_3=\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy,$$
où $D=\left\{(x,y)\in[0,1]^2/x^2+y^2\geq 1\right\}$.
4. Calculer
$$I_4=\iint_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy,$$
où $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$.
5. Calculer
$$I_5=\iiint_D zdxdydz,$$
où $D=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3/y^2+z\leq 1, x^2+z\leq 1\right\}$.
6. Calculer
$$I_5=\iint_D xydxdy,$$
où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x,y>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$ avec $a,b>0$.

EXERCICE 7. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale $\iint_G f(x,y)dxdy$, où G est donné par les relations :

- $y=x^2, x+y=2,$
- $x=0, x=-\sqrt{y}, x=-\sqrt{2-y},$
- $y=0, x=\sqrt{y}, x+y=6,$
- $x=0, x=\sin y, x=\cos y,\ y\in[0,\pi/2].$

EXERCICE 8. Représenter et calculer le volume de

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/-1\leq z\leq 1, x^2+y^2\leq z^2+1\right\}.$$

EXERCICE 9. Soit $D=[0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}.$$

EXERCICE 10. Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

EXERCICE 11. Soit $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2-2y \geq 0, x^2+y^2-1 \leq 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

EXERCICE 12. Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leq xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

EXERCICE 13. Soient $a,b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\,dy$.)