Volume et mesure de Lebesgue. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, suite.

EXERCICE 1. Dans les premières quatre questions de cette exercice, il s'agit des sous-ensembles de $\mathbb{R}^1$ et des fonctions définies là-dessus.

1. Posons $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. L'ensemble A est-il Borel-mesurable ? Lebesgue-mesurable ? Si oui, calculer son volume.
2. Les mêmes questions pour l'ensemble $C_{1/3}$ (= l'ensemble de Cantor à ratio d'un tiers).
3. Définissons la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$
La fonction f-est-elle mesurable ?
4. Calculer les intégrales de Lebesgue suivantes :
$$(a) \quad \int_{[0,1]} f(x)dx, \quad \int_{[0,1]} (1-f(x))dx,$$
$$(b) \quad \int_{C_{1/3}} f(x)dx, \quad \int_{C_{1/3}} (1-f(x))dx.$$
5. Dans $\mathbb{R}^d$: les questions 1-4(a) pour l'ensemble $B = \mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d$ et la fonction f correspondante.

EXERCICE 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y)dy,$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{2y}^{y} (x-y)e^y dx,$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\phi \int_1^{\cos\phi} r\sin\phi \cdot \log r dr.$

EXERCICE 3. Calculer les intégrales données sur les régions :

1. $\displaystyle\int_G (x\sin y + y\cos x)dxdy, \quad G = [0,\pi]\times[0,\pi/2],$
2. $\displaystyle\int_G (2x+3y)dxdy$, où G est bornée par $\{x=y, y=2x, x=2, x=3\}$,
3. $\displaystyle\int_G (x^2+y^2)dxdy$, où G est bornée par $\{y=x, y=x+a, y=a, y=3a\}, a \geq 0,$
4. $\displaystyle\int_G \sqrt{x-y}dxdy, \quad G = \left\{\frac{4}{5}x \leq y \leq x, 1 \leq y \leq 4\right\},$
5. $\displaystyle\int_G \sin(x+y)dxdy$, où G est le triangle aux sommets $(0,0),(3,2),(2,3)$.