# K1 MA4021 — Feuille d'exercices n° 4 — 2013

## Equations différentielles.

**EXERCICE 1.**

1. Résoudre les équations différentielles par la méthode de séparation de variables :

$$\tan x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \cot y\, dy = 0, \quad xy' - y = y^3, \quad xyy' = 1 - x^2, \quad y' \tan x = y.$$

2. Trouver les solutions satisfaisant les conditions initiales :

$$(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1; \quad (xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0,\ y(0) = 1; \quad y' \sin x = \cos y,\ y(\pi/4) = 1.$$

**EXERCICE 2.** Ramener les équa. diff. données à celles du type d'exercice précédent par un changement de variable, et ensuite les résoudre :

$$y' = (x+y)^2, \quad y' = (8x + 2y + 1)^2, \quad (2x + 3y - 1)\, dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$$

**EXERCICE 3.**

1. Résoudre les équa. diff. homogènes (d'ordre un) par le changement de variable $y = xu$ (ou bien $x = yu$) :

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad (x-y)y\, dx - x^2\, dy = 0, \quad y' = -\frac{x+y}{x}.$$

2. Paramétriser les courbes intégrales de l'équa. diff.

$$(x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$$

   Expliciter les courbes passantes par (4,0) et (1,1).

**EXERCICE 4.**

1. Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

$$y' - y = e^x, \quad y' = y \tan x + \cos x, \quad y' + 2xy = x, \quad y' - y/x = x, \quad xy' - 2y = 3x^4,$$

$$y' + 2y/x = x^3, \quad y' - y \cot x = \sin x, \quad (2x+1)y' = 4x + 2y, \quad y' - yx/(x^2+1) = x.$$

2. Trouver les solutions satisfaisant les conditions initiales :

$$xy' + y - e^x = 0,\ y(a) = b; \quad y' - y(1 - x^2) - 1 - x = 0,\ y(0) = 0; \quad y' - y \tan x = 1/\cos x,\ y(0) = 1,$$

$$x^2 y' - 2xy = -3,\ y(-1) = 1; \quad (1 + x^2)y' - 2xy = 4x,\ y(1) = 0; \quad y' - y \tan x = \cos x,\ y(1) = 2.$$

3. Résoudre les équations de Bernoulli :

$$y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}, \quad y' + y/x = -xy^2, \quad 2xyy' - y^2 + x = 0.$$

**EXERCICE 5.** Trouver les relations intégrales pour les équa. diff. suivantes :

$$(x+y)\, dx + (x + 2y)\, dx = 0, \quad (x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2xy\, dy = 0, \quad (x^3 - 3xy^2 + 2)\, dx - (3x^2 y - y^2)\ dy = 0.$$

**EXERCICE 6.**

1. Résoudre les équa. diff. (non-homogènes) à l'aide de la variation de constantes :

$$x^2y'' - xy' = 3x^2; \quad y''' + y' = 1/\cos x; \quad xy'' + y = x^2.$$

2. Vérifier que $y_1(x) = x$ est une solution de l'équa. diff. La résoudre à l'aide de cette information :

$$x^2(\log x - 1)y'' - xy' + y = 0.$$

**EXERCICE 7.**

1. Les systèmes de fonctions suivantes sont-ils libre sur une intérvalle :

$$x^2 + x - 1,\ x^2 + 3x + 2,\ 4x - 1; x^2 + 2x - 3,\ x^2 + 3x - 2,\ x^2 + 4x + 5; \quad x^3 + 1,\ x^3 - 2x,\ x^2 + 10,\ 4x - 7.$$

2. Résoudre les équa.diff :

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y'' + 2y' + y = 0, \quad y'' - y' = 0, \quad y'' + y = 0, \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre les équa. diff. avec les valeurs initiales :

$$y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 8; \quad y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1,$$

$$y'' + 6y' + 12y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2; \quad y'' + y' + y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

**EXERCICE 8.**

1. Trouver des solutions particulières d'équa. diff. (non-homogènes) suivantes :

$$y'' - 4y = x^2e^{2x}, \quad y'' + 9y = \cos 2x, \quad y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x},$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x, \quad y'' - 5y' + 6y = 2x + 1.$$

2. Trouver la solution générale d'équa. diff. :

$$y'' - 4y + 4y = x^2, \quad y'' - y' + y = x^3 + 6, \quad y'' - 8y + 7y = 14, \quad y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$$

$$y'' + y = \tan x, \quad y'' - 2y' + y = e^x/x, \quad y'' + y = 1/\sin x, y'' - y = \tanh x.$$