MHT 202 — 2010 — Devoir maison n°1

A RENDRE LA SEMAINE 9 SELON LE GROUPE

EXERCICE 1. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Donner une démonstration, une référence à un résultat du cours, ou un exemple.

1. La somme de deux suites convergentes est une suite convergente.
2. La somme de deux suites divergentes est une suite divergente.
3. Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.
4. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
5. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
6. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
7. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
8. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

EXERCICE 2.

1. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^6}{n^7+22}\ ,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n^3}{4n^4+2n^2}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n\ ,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)+\cos(n)}{\sqrt{n}}.$$
2. Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
   (b) Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2-l-1=0$ et calculer l.

EXERCICE 3. Soit $H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

1. En utilisant l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$, montrer que $\forall n > 0$:
$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n)+1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Expliciter le comportement de H_n quand $n \to \infty$.

EXERCICE 4. Posons $u_2 = 1-\frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,
$$u_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}).$$
Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n = \frac{1}{2}$.