MHT 202 **2011** **Devoir libre n° 2**

EXERCICE 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = 1$ pour $x > 0$. Soit g une seconde fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on suppose continue. Montrer que la fonction $f \times g\colon x \mapsto f(x) \times g(x)$ est continue si et seulement si $g(0) = 0$.

EXERCICE 2.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant
$$f(x+h) - f(x) = hf'(x)$$
pour tous $x, h \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe a, b tel que $f(x) = ax + b$.
2. On suppose maintenant que g est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie
$$g(x+h) - g(x) = hg'(x + \frac{h}{2}).$$
Montrer que g est un polynôme du second degré.

EXERCICE 3. Montrer les inégalités suivantes :

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, pour tout entier $n > 0$:
2. $(1+b)^{1/3} - (1+a)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(b-a)$, pour $0 < a < b$;
3. $10,22 < \sqrt{105} < 10,25$. (Utiliser le théorème des accroissements finis !)

EXERCICE 4.

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une limite finie en plus l'infini et en moins l'infini est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est uniformément continue sur son domaine de définition :
   (a) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$;
   (b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (\sin(x))^2$;
   (c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^2)$.

EXERCICE 5.

1. Soit $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+2}\cos(\frac{1}{x})$. On note $A = f(]0, +\infty[)$. Que vaut $\sup(A)$?
2. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que l'équation $x^2(\cos(x))^n + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution.