ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010 /2011

DEVOIR SURVEILLÉ

UE : MHT 202

Épreuve : DS N°1

Date : 09 Mars 2011

Heure : 8 Heure 30 *Durée :* 1 Heures 30

Épreuve de Monsieur : Philippe Charpentier

Tous Documents Interdits

Exercice I

1. *Questions de cours*
   (a) Donner la définition de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ et une condition suffisante pour son existence.
   (b) Démontrer, en utilisant la condition suffisante de la question précédente, que toute suite réelle $(u_n)_n$ croissante majorée est convergente.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$, $u_n = (u_{n-1})^2$, $n \geq 1$. Étudier la convergence de cette suite en fonction de u_0.

Exercice II

1. *Question de cours*. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Donner la définition de la limite supérieure, $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$, (resp. inférieure, $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$) de la suite $(u_n)_n$.
2. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ ci-dessous, on note $A = \{u_n, n \geq 1\}$; déterminer $\sup A$, $\inf A$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$:
   (a) $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$, $n \geq 1$;
   (b) $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin \frac{\pi n}{4}$, $n \geq 1$.

Exercice III

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1. Montrer que f est continue.
2. *Question de cours*. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. Soit (P) la propriété suivante :
   « pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha_\varepsilon \in]0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x-y| > \varepsilon$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \alpha_\varepsilon |x-y|$ »
   (a) Écrire la contraposée de (P).
   (b) En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que (P) est vraie.
4. On suppose de plus $f([0,1]) \subset [0,1]$.
   (a) Montrer que la fonction $g(x) = |x - f(x)|$ atteint son minimum sur $[0,1]$ en un point α qui est l'unique point fixe (i.e. $f(\alpha) = \alpha$) de f.
   (b) Soit $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq \alpha$. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $x_n = f(x_{n-1})$.
      i. Montrer que la suite $n \to |x_n - \alpha|$ est décroissante.
      ii. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers α. *Indication* : si cela est faux, déduire de la question précédente que, pour tout n, on a $|x_n - \alpha| > \varepsilon > 0$ et, en utilisant la question 3. (b), montrer que $|x_n - \alpha| \leq \alpha_\varepsilon^n |x_0 - \alpha|$.

FIN