EXERCICE 1.

Pour chacune des suites suivantes, trouver un encadrement, en déduire qu'elles convergent et calculer leurs limites :

1. $u_n = \frac{E(an)}{n}$, $a \in \mathbb{R}$;
2. $u_n = \sum_{1 \leq k \leq 2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$;
3. $u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

EXERCICE 2.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

Montrer que ces suites convergent vers une même limite qui n'est pas un nombre rationnel.

2. Soient $0 < a < b$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

EXERCICE 3.

1. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes vers la même limite.
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les trois sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes.
3. Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = (-1)^n,\ u_n = i^n,\ u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

4. Montrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.

EXERCICE 4.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite l. Montrer que la suite $(v_n)_n$ de terme général

$$v_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} u_i}{n}$$

est également convergente de limite l.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels > 0 telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers $l > 0$. Montrer que la suite $\left(u_n^{1/n}\right)_n$ converge aussi vers l.

EXERCICE 5.

1. Soit $(u_n)_n$ montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Vers quoi tends u_n quand $n \to +\infty$?
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ vérifiant, $\forall n$, $|u_{n+1} - u_n| \leq 1/2^n$ est de Cauchy.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que, $\forall p, q$, $\left|u_{p+q} - u_p - u_q\right| \leq 1$.
   (a) Montrer que, $\forall q$, $\forall k \geq 1$, $\left|u_{kq} - ku_q\right| \leq k - 1$ et en déduire que, pour $r \in \mathbb{N}$, $\left|u_{kq+r} - ku_q\right| \leq |u_r| + k$.
   (b) En déduire que si k et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par $q \neq 0$, on a $\left|u_n - \frac{n}{q} u_q\right| \leq \frac{r}{q} \left|u_q\right| + |u_r| + k$.

(c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est convergente.

EXERCICE 6.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}$. Soit $A = \{p\alpha - E(p\alpha), p \in \mathbb{N}\}$, $A_n = \{p\alpha - E(p\alpha), p \in \mathbb{N}, p \leq n\}$, $n \geq 1$. En remarquant que A_n est un ensemble à $n+1$ éléments dans $[0,1]$, montrer qu'il existe p_1 et $p_2 \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2 \leq n$, tels que
$$|p_1\alpha - p_2\alpha - E(p_1\alpha) + E(p_2\alpha)| \leq \frac{1}{n}.$$
En utilisant que α est irrationnel, en déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe un entier $0 \leq r \leq n$ et un entier $q \in \mathbb{N}$ tels que $|r\alpha - q| \leq 1/n$. Conclure que l'ensemble $\{r\alpha - q, r, q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Déduire de la question précédente l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_n$.

EXERCICE 7.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.
   (a) Montrer que si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$, alors $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} v_n$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Montrer que, en général l'égalite $\overline{\lim}_n (u_n + v_n) = \overline{\lim}_n u_n + \overline{\lim}_n v_n$ n'est pas vraie, mais que l'on a $\overline{\lim}_n (u_n + v_n) \leq \overline{\lim}_n u_n + \overline{\lim}_n v_n$ et $\underline{\lim}_n (u_n + v_n) \geq \underline{\lim}_n u_n + \underline{\lim}_n v_n$.
2. Calculer $\sup\{u_p, p \geq n\}$, $\inf\{u_p, p \geq n\}$, $\overline{\lim}_n u_n$ et $\underline{\lim}_n u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :
   (a) $u_n = (-1)^n$;
   (b) $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$;
   (c) $u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$;
   (d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

EXERCICE 8.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$définie par $u_0 \in]1, +\infty[$ et
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 + 7u_n)} - 1$$
(on distinguera les cas $u_0 < 2$, $u_0 = 2$ et $u_0 > 2$.

EXERCICE 9.

Soit f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle qu'il existe un réel positif $0 < k < 1$ tel que
$$\forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
Soit $a \in [0,1]$. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, $\forall n$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f.