EXERCICE 1. (DS1 2006-07). On considère la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$.

1. Montrer que $f(]0,1[) \subset]0,1[$ et que $f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$.
2. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in]0,1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) est croissante.

EXERCICE 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \inf\{|x-t| : t \in]0,1]\}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| < |x-y|$.
3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $]-\infty,0],]0,1],]1,+\infty]$.

EXERCICE 3. Montrer qu'une fonction continue péridoque sur $\mathbb{R}$ y est bornée.

EXERCICE 4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue vérifiant $f(x) < x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_{+*} \times \mathbb{R}_{+*}$, il existe une constante $M, 0 \leq M \leq 1$ telle que $f(x) < Mx$ pour $\forall x \in [a,b]$.

EXERCICE 5. Montrer qu'une fonction continue, positive sur $[0,+\infty[$ et qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$, est bornée et elle atteint sa borne supérieure. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

EXERCICE 6. Soit f une fonction définie sur intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Montrer que f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de I qui converge vers x_0, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

EXERCICE 7. Montrer que deux fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$, coïncident sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(2x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

EXERCICE 9.

1. Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   est disconitnue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature de points de disconituité de la fonction $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $r \in \mathbb{Q}$, calculer $f(p), f(1/p), f(r)$ en fonction de $f(1)$.
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il y a $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Soit P un polynôme de degré impair. P admet-t-il une racine réelle ?

EXERCICE 12. Soit $p, q > 0$ et f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

En considérant la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = pf(a) + qf(b) - (p+q)f(x)$, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$

EXERCICE 13. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_p \in [0, 1]$ tel que $f(x_p + 1/p) = f(x_p)$ (on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x+1/p) - f(x)$).

EXERCICE 14. Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$ et soit $J = [c, d]$ avec $J \subset I$. Les deux propositions suivantes sont elles équivalentes ?

1. $f|_J$ est continue.
2. f est continue sur J.

EXERCICE 15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par f d'un segment est un segment.
3. L'image par f d'une partie bornée est bornée.
4. L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.