MHT 202 — 2010 — Feuille d'exercices n° 3

EXERCICE 1. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x|$,
2. $g(x) = x|x|$,
3. $h(x) = |x(x-2)|$.

EXERCICE 2. Calculer les dérivées des fonctions :

1. $f(x) = \ln|\tan(x/2)|$,
2. $g(x) = \ln(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)}))$,
3. $h(x) = \frac{1}{(x^2)^{1/3}} - \frac{1}{(x^3)^{1/2}}$,
4. $i(x) = x^x$.

EXERCICE 3. En dérivant n fois la fonction e^{3x}, montrer que $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.

EXERCICE 4. Montrer qu'une fonction qui est dérivable sur un intervalle I, sur lequel elle a dérivée bornée, est uniformément continue sur I.

EXERCICE 5.

1. Donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue.
2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que f' vérifie sur I le théorème des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue (théorème de Darboux).

EXERCICE 6.

1. Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les intervalles $[1,2]$ puis $[2,3]$ pour la fonction $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
2. On pose $f(x) = 1-(x^2)^{1/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1,1]$; pourquoi cela ne prend-il pas le théorème de Rolle en défaut ?
3. Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1,2]$.

EXERCICE 7. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la dérivée de f s'annule sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8. Soit f la fonction de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ si $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = 1/x$ si $1 < x \leq 2$. Montrer que f est dérivable sur tout son domaine de définition, et donner sur celui-ci une version explicite du théorème des accroissements finis.

EXERCICE 9. Soit f une fonction numérique dérivable non bornée sur une intervalle fini ouvert. Montrer que f' n'est pas borné sur cet intervalle. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 10. Soit f une fonction dérivable sur $[-1,1]$, dont on suppose que $f(-1)=0=f(1)$. On note $f'(-1)$ et $f'(1)$ les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1, respectivement. On pose $g(x)=\frac{f(x)}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note $\tilde{g}$ la fonction prolongée ; expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.
2. Montrer qu'il existe $c\in]-1,1[$ tel que $g'(c)=-\frac{1}{4}(f'(1)+f'(-1))$.
3. La fonction $F(x)=\frac{1}{1-x^2}$ est-elle bornée sur $]-1,1[$?
4. Même question pour f.
5. Même question pour g.

EXERCICE 11. Soit f une fonction continue sur un intervalle fini ouvert I. On suppose qu'il existe un réel a tel que pour tout x de I, $|f'(x)|<a$. Montrer, en utilisant un critère de Cauchy, que la suite $f(1/n)$ (pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$) converge.

EXERCICE 12. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x)=1/x^a$, montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, on a $\frac{1}{n^{a+1}}<\frac{1}{a}[\frac{1}{(n-1)^a}-\frac{1}{n^a}]$.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^{a+1}}$. Montrer que cette suite admet une limite finie.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln(x)$, montrer que pout tout n dans $\mathbb{N}$, $n\neq 0$, on a $\ln(n+1)-\ln(n)<1/n$.
3. Soit (v_m) la suite définie par $v_m=\sum_{n=1}^{m}1/n$. Montrer que $\lim_{m\to\infty}v_m=+\infty$.

EXERCICE 13. Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annule en k réels distincts alors sa dérivée s'annule en au moins $k-1$ réels distincts. En déduire que si P est un polynôme en une indéterminées à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, il en va de même de P'.