Université Bordeaux I **2009-2010**

Analyse 2 (MHT 302)

Compléments du cours N. 1 : le critère
de la différentiabilité d'une application

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Soit $(e_k)_{k=1,\ldots,d}$ $((e'_j)_{j=1,\ldots,d_1})$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$ $(\mathbb{R}^{d_1})$ fixée.

Théorème 1 *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Alors f est de la classe C^1 sur O ($f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d_1})$)* ssi *toutes les dérivées partielles*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, d_1,\ k = 1, \ldots, d$$

sont bien définies et continues sur O (c.à.d., $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in C(O)$).

Démonstration. Pour simplifier, soit $d_1 = 1$. Rappelons que pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$||A||_o = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, ||x|| \leqslant 1} |Ax|,$$

et, en particulier, $|Ax| \leqslant ||A||_o ||x||$.

" $\Rightarrow$ " (la direction facile). Comme $f \in C^1(O, \mathbb{R})$, nous avons que f est différentiable sur O, et les résultats du cours impliquent que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existent pour tous k. La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(\forall k)$ est la seule chose à vérifier. En effet, pour $x, y \in O$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(y) \right| &= |(f'(x) - f'(y))e_k| \\ &\leqslant ||f'(x) - f'(y)||_o \to 0 \qquad (x \to y). \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ". Soit $x \in O$ et $h \in B(0, \varepsilon)$ tel que $x + \varepsilon \in B(x, \varepsilon) \subset O$. Posons

$$x^0 = x,\ x^k = x^0 + \sum_{i=1}^{k} h_i e_i,$$

où $h = (h_1, \ldots, h_d)^t$. On définit $A(x)h = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) h_k$; le but est de montrer que $A(x) = f'(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=1}^{d} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{d} (f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{d} h_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{k-1} + t \cdot h_k e_k)\, dt, \end{aligned}$$

où nous venons d'utiliser la formule de Leibniz (i.e., la formule fondamentale du calcul intégral) en $\mathbb{R}^1$. Donc

$$f(x+h) - f(x) - A(x)h = \sum_{k=1}^{d} h_k \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{k-1} + t \cdot h_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right) dt.$$

Notons l'expression à droite par $\varepsilon_x(h)$; chaque intégrale sous la somme est notée par B_k. Nous voulons démontrer que $\lim_{h \to 0} ||\varepsilon_x(h)||_1 / ||h|| = 0$. Alors, par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_x(h)| = \left| \sum_{k=1}^{d} h_k B_k \right| &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} B_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{d} h_k^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} \left\{ \max_{r \in [0, h_k]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{k-1} + r e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| \right\}^2 \right)^{1/2} \cdot ||h|| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} \max_{y \in B(x, \varepsilon)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right|^2 \right)^{1/2} \cdot ||h|| \\ &=: \alpha(h) \cdot ||h||, \end{aligned}$$

et évidemment $\alpha(h) \to 0$ par la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ (c'est une racine d'une somme où chaque terme va vers 0) quand $0 \leqslant ||h|| < \varepsilon \to 0$. Q.E.D.

Corollaire 1 *Si toutes les dérivées partielles* $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(j = 1, \ldots, d_1,\ k = 1, \ldots, d)$ *sont bien définies et continues sur* O*, on a* $f \in D(O, \mathbb{R}^{d_1})$.

Démonstration est évidente, car $f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d_1}) \Rightarrow f \in D(O, \mathbb{R}^{d_1})$.