Université Bordeaux I **2009-2010**
Analyse 2 (MHT 302)

Compléments du cours N. 3 : L'étude d'extrema locaux, un exemple, le théorème de la fonction implicite/inverse, le changement des coordonnées, quelques informations sur les intégrales curvilignes.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

• Etude d'extrema locaux.

Théorème 1 *Soit $f \in C^2(O, \mathbb{R})$, où $O \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert. Soit $x^0 \in O$ un point critique de f. On a :*

1. *Si $D^2f(x^0) > 0$, alors x^0 est un point d'un minimum local (isolé).*
2. *Si $D^2f(x^0) < 0$, alors x^0 est un point d'un maximum local (isolé).*
3. *Si $D^2f(x^0)$ est indéfinie, x^0 n'est pas un point d'extremum local (c'est un point selle/point col).*

• Exemple d'une étude d'extrema locaux et globaux.

Etudier (indiquer) les extrema locaux et globaux de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin xy, \quad z = (x, y).$$

Nous donnons le plan de l'étude ainsi que les points clés de la réponse à la question. Les details sont à vérifier par vous-mêmes ! Les questions (en groupe de TD et par courrier éléctronique) sont bienvenues.

- On vérifie facilement que $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (au fait, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, mais on n'en a pas besoin).
- *Calcul de $Df(z)(= f'(z))$ (la jacobienne) et de $D^2f(z)(= f''(z))$ (la hessienne) de la fonction :*

$$\begin{aligned} f' &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = [y\cos xy, x\cos xy], \\ f'' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y^2 \sin xy, & \cos xy - xy\sin xy \\ \cos xy - xy \sin xy, & -x^2 \sin xy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- *Calcul des points critiques ($f' = 0$) de la fonction :* les points critiques en question sont donnés par $\{(x, y) : x = 0\}, \{(x, y) : y = 0\}$ (deux droites) et la famille de courbes $\{(x, y) : xy = \pi/2 + n\pi\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (des hyperboles). Faites le dessin SVP (distinguer les cas $n \geq 0$ et $n < 0$).
- *Application du théorème 1* (si le théorème ne donne pas de réponse, une étude supplémentaire est nécessaire) :
  - $(x, y) = (0, 0)$: on a $f'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, le théorème 1 n'est pas applicable.

    On constate que $\sin xy \sim \frac{1}{3}(xy)^3$ $(xy \sim 0)$, et $(0, 0)$ est un point selle.

– $\{y = 0\}$: on a $f'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leq 0$; le pt. 2 du théorème 1 n'est pas applicable (car il demande $\cdots < 0$). Un petit calcul montre que les points $(x, 0),\ x \neq 0$ ne sont pas extremaux.

– $\{x = 0\}$: on a $f'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leq 0$; une fois de plus, le pt. 2 du théorème 1 n'est pas applicable (car il demande $\cdots < 0$). Un calcul montre que les points $(0, y),\ y \neq 0$ ne sont pas extremaux.

– $\gamma_n = \{(x, y) : xy = \pi/2 + 2n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}$: on a $f'' = -\begin{bmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{bmatrix} \leq 0$, le pt 2. du théorème 1 ne s'applique pas. Notons que pour $(x, y) \in \gamma_n$, on a $\sin xy = 1$. Comme $-1 \leq \sin xy \leq 1,\ \forall x, y$, nous constatons que les points de γ_n sont des points de maxima locaux et globaux (non-isolés).

– $\delta_n = \{(x, y) : xy = -\pi/2 + 2n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}$: on a $f'' = \begin{bmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{bmatrix} \geq 0$, le pt 1. du théorème 1 ne s'applique pas. Observons que pour $(x, y) \in \delta_n$, on a $\sin xy = -1$. Comme $-1 \leq \sin xy \leq 1,\ \forall x, y$, nous constatons que les points de δ_n sont des points de minima locaux et globaux (non-isolés).

• Théorèmes d'application implicite/application inverse.

Ecrivons $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} = \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$ $(d_1 + d_2 = d)$. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d^2})$. Nous avons

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{d_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{d_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_{d_1}} & \frac{\partial f_{d_2}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_{d_2}}{\partial y_{d_2}} \end{bmatrix} \\ &= [\underbrace{\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_{d_1}} f}_{D_1 f},\ \underbrace{\partial_{y_1} f, \ldots, \partial_{y_{d_2}} f}_{D_2 f}]. \end{aligned}$$

Théorème 2 (le théorème d'application implicite) *Soit O et f comme ci-dessus. Soit $(x^0, y^0) \in O$ tel que $f(x^0, y^0) = 0$ et $\det D_2 f(x^0, y^0) \neq 0$. Alors :*

- *il existe un voisinage $U \subset O$ de (x^0, y^0) et un voisinage $V \subset \mathbb{R}^{d_1}$ de x^0,*
- *il existe l'unique application $g \in C^1(V, \mathbb{R}^{d_2})$,*

telles que $f(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in U$ ssi *$y = g(x)$ pour $x \in V$. De plus, pour $x \in V$*

$$Dg(x) = -[D_2 f(x, g(x))]^{-1} D_1 f(x, g(x)).$$

Théorème 3 (le théorème d'application inverse) *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in C^1(O, \mathbb{R}^d)$. Soit aussi $x^0 \in O$ et $\det Df(x^0) \neq 0$. Alors*

- *il existe un voisinage $U \subset O$ de x^0 et un voisinage V de $y^0 = f(x^0)$ tels que*
- *$f : U \to V$ est bijéctive (donc $f^{-1} : V \to U$ est bien définie).*

De plus, $f^{-1} \in C^1(V, U)$ et, pour $x \in U$ et $y = f(x)$

$$\det Df(x) \neq 0, \quad Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}.$$

- **Changement de variables (coordonnées).**
  - $\mathbb{R}^2$, coordonnées polaires :

$$(r,\theta) \xrightarrow{F} (x,y), \text{ où } r \in]0,+\infty[, \ \theta \in [0,2\pi[.$$

On a $\quad x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, et

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \det DF = r.$$

Les calculs suivants sont similaires au précédent et ils ne seront pas détaillés.

  - $\mathbb{R}^3$, coordonnées cylindriques.

$$(r,\theta,h) \xrightarrow{F} (x,y,z), \text{ où } r \in]0,+\infty[, \ \theta \in [0,2\pi[, h \in \mathbb{R}.$$

On a $\quad x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = h$, et
$\det DF = r$.

  - $\mathbb{R}^3$, coordonnées sphériques.

$$(r,\theta,\varphi) \xrightarrow{F} (x,y,z), \text{ où } r \in]0,+\infty[, \theta \in [0,2\pi[, \varphi \in [0,\pi].$$

On a $\quad x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ et
$\det DF = r^2\sin\varphi$.

  - $\mathbb{R}^d$, coordonnées sphériques.

$$(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{d-1}) \xrightarrow{F} x = (x_1,\ldots,x_d),$$

où $r \in]0,+\infty[, \varphi_i \in [0,\pi], \ i = 1,\ldots,d-2$, et $\varphi_{d-1} \in [0,2\pi[$.
On a $r = ||x||$ et

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{d-2}\cos\varphi_{d-1}, \\ x_d &= r\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{d-2}\sin\varphi_{d-1}. \end{aligned}$$

- **Intégrales curvilignes.**
  - Par une courbe (un chemin) dans $\mathbb{R}^d$ on entend l'image de l'application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. On écrit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_d(t))^t \in \mathbb{R}^d$, où $t \in [a,b]$. Souvent, on confond (volontairement) l'image de γ et l'application et on appelle la courbe γ.
    On dit que γ est continue (de la classe C^k), si l'application γ est continue sur $[a,b]$ ($C^k[a,b]$). Dans la suite, nous supposons $\gamma \in C^1[a,b]$.
  - Soit P : $\mathrm{Im}\gamma \to \mathbb{R}^d$ une application définie sur l'image de γ, c.à.d., $P(x) = (P_1(x), P_2(x) \ldots P_d(x))^t, \ x \in \gamma$. L'intégrale curviligne de P sur γ est définie comme

$$\begin{aligned} \int_\gamma P(t)\cdot d\gamma(t) &= \int_\gamma (P(t), d\gamma(t)) = \int_a^b \{P_1(t)d\gamma_1(t) + \cdots + P_d(t)d\gamma_d(t)\} \\ &= \int_a^b \{P_1(t)\gamma_1'(t) + \cdots + P_d(t)\gamma_d'(t)\}\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^d P_i(t)\gamma_i'(t)\,dt. \end{aligned}$$

On parle aussi de l'intégrale du champs vectoriel P le long de la courbe γ.

- Soit $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ telle que φ est bijéctive, de la classe C^1 et $\varphi'(t) \neq 0$; on dit que $\tau = \varphi(t)$ est une nouvelle paramétrisation de γ (ou bien un changement de variable). Deux cas peuvent se présenter : premièrement, $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$, on dit alors que la paramétrisation τ a la même orientation que t, et

$$\int_\gamma P(t) \cdot d\gamma(t) = \int_{\gamma\circ\varphi} P(t) \cdot d\gamma(t).$$

  Dans le deuxième cas, $\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$, la paramétrisation τ a l'orientation inverse par rapport à t, et

$$\int_\gamma P(t) \cdot d\gamma(t) = -\int_{\gamma\circ\varphi} P(t) \cdot d\gamma(t).$$

- La longueur $l(\gamma)$ de la courbe γ se calcule comme

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d \gamma'^2_i(t)}\, dt.$$