DEUG

MIAS 411

Philippe Charpentier

Février 2003

Université Bordeaux I
Mathématiques et Informatique
351, Cours de la Libération, 33405 TALENCE
Adresse électronique: Philippe.Charpentier@math.u-bordeaux.fr

Table des matières

CHAPITRE I

ESPACES MÉTRIQUES ESPACES NORMÉS

I.1 DÉFINITIONS DE BASE

Définition I.1.1.

Soit X un ensemble. On appelle ***Distance*** *sur* ***X*** *une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*
2. *$\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;*
3. ***Inégalité triangulaire*** *: $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Un ensemble X muni d'une distance est appelé un ***espace métrique****.*

Définition I.1.2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle ***norme*** *sur E une application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ possédant les propriétés suivantes :*

1. *$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;*
3. ***Inégalité triangulaire*** *: $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un ***espace normé****.*

PROPOSITION I.1.1.

Soit E un espace normé. Alors $(x, y) \to \|x - y\|$ est une distance sur E. Tout espace normé est considéré comme muni de cette distance et est donc, en particulier, un espace métrique.

Exemple.

1. **Exemple fondamental** : $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) muni de la norme euclidienne donc de la distance euclidienne. $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) muni des normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_\infty$.
2. Soit X un ensemble. Soit $\mathscr{B}(X : \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$. Alors $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ est une norme sur $\mathscr{B}(X : \mathbb{C})$ appelée la **norme de la convergence uniforme**.
3. Sur $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{C})$ $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)| \, dt$ et $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$ sont des normes.
4. Sur un ensemble X quelconque, $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \neq y \\ 0, & \text{si} \quad x = y \end{cases}$ est une distance.

Définition I.1.3.

Soit X un espace métrique.

1. *Soient $x \in X$ et $r > 0$. On appelle* **boule ouverte** *(resp.* **fermée***) de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) = \{y \in E$ tels que $d(x,y) < r\}$ (resp. $\bar{B}(x,r) = \{y \in X$ tels que $d(x,y) \leq r\}$.*
2. *On dit qu'une partie O de X est* **ouverte** *si $\forall x \in O$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Par définition $\emptyset$ est ouvert.*
3. *Une partie F de X est dite* **fermée** *si $E \setminus F$ est ouverte. $\emptyset$ est fermé car son complémentaire est ouvert.*
4. *Soit $x \in X$. On appelle* **voisinage** *de x toute partie V de X contenant une boule ouverte non vide $B(x,r)$. Il revient au même de dire qu'il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$.*
5. *L'ensemble des ouverts d'un espace métrique s'appelle la* **topologie** *de X.*

Remarque. Tout ouvert est donc réunion de boules ouvertes.

PROPOSITION I.1.2.

1. *Dans un espace métrique toute boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. fermé).*
2. *Toute réunion d'ouverts d'un espace métrique est un ouvert. $\emptyset$ et l'espace tout entier sont ouverts.*
3. *Toute intersection de fermés d'un espace métrique est un fermé. $\emptyset$ et l'espace tout entier sont fermés.*

Exemple. Description des ouverts de $\mathbb{R}^n$ pour la distance euclidienne ainsi que pour les autres distances usuelles (comparaison des boules).

Définition I.1.4.

Soit X un espace métrique. Soit A une partie de X.

1. *On appelle* **intérieur** *de A le plus grand ouvert contenu dans A (i.e. la réunion des ouverts contenus dans A) et on le note $\mathring{A}$.*
2. *On appelle* **adhérence** *de A le plus petit fermé contenant A (i.e. l'intersection des fermés contenant A) et on le note $\bar{A}$.*
3. *On appelle* **frontière** *de A l'ensemble $\bar{A} \setminus \mathring{A}$ (qui est donc fermé) et on la note $\mathrm{Fr}(A)$.*

PROPOSITION I.1.3.

Soient X un espace métrique et A une partie de X.

1. *Un point x de A appartient à l'intérieur de A (on dit « est intérieur à A ») s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$ ou s'il existe un voisinage de x contenu dans A. A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*
2. *Un point x de X appartient à l'adhérence de A (on dit « est adhérent à A ») si $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$.*
3. *Un point x de X appartient à la frontière de A (on dit « est point frontière de A ») si $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.*
4. *$\bar{A} = X \setminus \overset{\circ}{\widehat{(X \setminus A)}}$ et $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.*

PROPOSITION I.1.4.

Soient X un espace métrique et A et B deux parties de X.

1. *$A \subset B$ implique $\bar{A} \subset \bar{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.*
2. *$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, mais il n'y a pas égalité en général.*
3. *$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, mais il n'y a pas égalité en général.*

Exemple. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ (distance usuelle), $\mathring{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$ alors que $\bar{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Définition I.1.5.

Soit X un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est ***dense dans X*** *si $\bar{A} = X$. Si A et B sont deux parties de X, on dit que A est* ***dense dans B*** *si $\bar{A}$ contient B.*

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ pour la topologie de la distance usuelle. Plus généralement, si O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie de la distance euclidienne, alors $O \cap (\mathbb{Q}^n)$ et $O \cap ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n)$ sont denses dans O.

Exercice. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion **dénombrable** de boules ouvertes.

Définition I.1.6.

Soient X un espace métrique et A une partie de X. On dit qu'un point x de X est point d'accumulation de A si, $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. En particulier, $B(x, r) \cap A$ est infini.

Définition I.1.7.

1. *Soit X un ensemble. On dit que deux distances sur E sont **topologiquement équivalentes** si les topologies (i.e. les ouverts) qui leur sont associées sont le même.*
2. *Soit E un espace vectoriel. On dit que deux normes sur E sont **topologiquement équivalentes** si les distances qui leur sont associées le sont.*
3. *Soit X un ensemble. On dit que deux distance d_1 et d_2 sur X sont **équivalentes** s'il existe deux constantes c et C telles que $\forall x, y \in X$, $cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y)$. Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.*
4. *Soit E un espace vectoriel. On dit que deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont **équivalentes** s'il existe deux constantes c et C telles que $\forall x \in E$, $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Il revient au même de dire que les distances associées sont équivalentes.*

1. Soient X_1 et X_2 deux espaces normés de distances respectives d_1 et d_2. Soit $X_1 \times X_2$ l'ensemble produit de X_1 par X_2. On appelle **espace métrique produit** des deux espaces métriques X_1 et X_2 l'espace métrique obtenu en munissant $X_1 \times X_2$ de la distance d définie par : $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(d_1(x_1, y_1)^2 + d_1(x_1, y_1)^2\right)^{1/2}$.

   (a) On appelle **espace normé produit** de deux espaces normé E_1 et E_2 (sur le même corps $\mathbb{K}$) de normes respectives $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ l'espace normé obtenu en munissant l'espace vectoriel $E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x_1, x_2)\| = \left(\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_1^2\right)^{1/2}$.

Remarque. 1. Sur $X_1 \times X_2$, les formules

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_1(x_1, y_1)\} \text{ et } d''((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_1(x_1, y_1)$$

définissent des distances équivalentes à celle de la définition.

2. Sur $E_1 \times E_2$, les formules $\|(x_1, x_2)\|' = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ et $\|(x_1, x_2)\|'' = \|x_1\| + \|x_1\|$ définissent des normes équivalentes à celle de la définition.

I.2 Suites dans les espaces métriques et les espaces normés

On rappelle que l'on appelle suite dans un ensemble X une application $n \to x_n$ de $\mathbb{N}$ dans X et on la note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement $(x_n)_n$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X, on appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forme $x'_k = x_{\varphi(k)}$ où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Généralement, une sous-suite d'une suite $(x_n)_n$ est notée $(x_{n_k})_k$ (i.e. $n_k = \varphi(k)$).

Définition I.2.1.

*Soit X un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ dans X converge vers un point x de X si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Le point x est appelé la limite de la suite $(x_n)_n$. Il revient au même de dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que, pour $n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$, ou que, pour tout ouvet O_x contenant x, il existe $n_O \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_O$, $x \in O_x$, ou encore que, pour tout voisinage $V(x)$ de x il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_V$ on a $x_n \in V(x)$. Une suite qui converge est dite **convergente** et une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.*

Dans un espace normé E une suite $(x_n)_n$ converge vers x si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

PROPOSITION I.2.1.

*Si d_1 et d_2 sont deux distances **topologiquement équivalentes** sur un ensemble X les suites convergentes pour d_1 et d_2 sont les même.*

PROPOSITION I.2.2.

Dans un espace métrique, si une suite converge, sa limite est unique et on note $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

PROPOSITION I.2.3.

Si $(x_n)_n$ est une suite convergente dans un espace métrique, toute sous-suite $(x_{n_k})_k$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

1. Soient X_1 et X_2 deux espaces métriques. Soient $(x_n^1)_n$ (resp. $(x_n^2)_n$) une suite dans X_1 (resp. X_2). Alors la suite $(x_n^1, x_n^2)_n$ de $X_1 \times X_2$ est convergente dans l'espace métrique produit si et seulement si les deux suites $(x_n^1)_n$ et $(x_n^2)_n$ sont convergentes.

   (a) Soient E un espace normé, $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ deux suites dans E, $(\lambda_n)_n$ et $(\mu_n)_n$ deux suites dans $\mathbb{K}$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$, alors $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n + \mu_n y_n = \lambda x + \mu y$.

PROPOSITION I.2.4.

*Soient X un espace métrique et A une partie de X. Un point x de X est adhérent à A si et seulement il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. De plus, x est point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite **infinie** (i.e. prenant une infinité de valeurs distinctes) $(x_n)_n$ de points de A telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Définition I.2.2.

Soient X un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X. On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ s'il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de la suite $(x_n)_n$ qui converge vers x.

Remarque. Si x est valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ alors x est un point adhérent à l'ensemble des points de la suite $(x_n)_n$, mais la réciproque est fausse. Par contre si x est point d'accumulation de $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ alors x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

Définition I.2.3.

*Soit X un espace métrique. On appelle **suite de Cauchy** dans X une suite $(x_n)_n$ dans X qui vérifie la propriété suivante : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour p et $q \geq n_\varepsilon$, on a $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.*

PROPOSITION I.2.5.

Si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur un ensemble X les suites de Cauchy associées à d_1 et d_2 sont les même. Par contre ceci n'est plus vrai, en général, pour des distances qui sont seulement topologiquement équivalentes.

PROPOSITION I.2.6.

Soit X un espace métrique.

1. *Toute suite convergente est de Cauchy et toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.*

Définition I.2.4.

*On dit qu'un espace métrique X est **complet** si toute suite de cauchy de X est convergente. On dit qu'une partie A d'un espace métrique est **complète** si toute suite de Cauchy de points de A est convergente dans A. Un espace vectoriel normé complet est appelé un **espace de Banach**.*

Dans un espace métrique complet, pour montrer qu'une suite est convergente, il suffit donc de vérifier qu'elle est de Cauchy. Cela s'appelle le **critère de Cauchy**.

PROPOSITION I.2.7.

Dans un espace métrique complet, une partie est complète si et seulement elle est fermée.

PROPOSITION I.2.8.

Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur un ensemble X. Alors X muni de d_1 est complet si et seulement si X muni de d_2 l'est.

Par contre ceci est faux pour des distances seulement topologiquement équivalentes.

PROPOSITION I.2.9.

Soient X_1 et X_2 deux espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X_1 \times X_2$ est compet si et seulement si X_1 et X_2 le sont.

THÉORÈME I.2.1.

Muni de la norme euclidienne (ou d'une norme équivalente) les espaces normés $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach.

Exemple. Soit X un ensemble.

1. $\mathscr{B}(X;\mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.
2. $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

PROPOSITION I.2.10 (Propriété de Cantor).

Soit X un espace métrique complet. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0. Alors $\bigcap\limits_n F_n \neq \emptyset$.

THÉORÈME I.2.2 (Théorème du point fixe).

Soit X un espace métrique complet. Soit f une fonction de X dans lui-même telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tous x, y dans X on ait $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$ (i.e. f est k-lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k). Alors f possède un unique point fixe dans X (i.e. il existe un unique point $x \in X$ tel que $f(x) = x$).

Remarque. S'il existe un entier p tel que f^p soit k-lipschitzienne ($k \in]0,1[$), alors f possède encore un unique point fixe. On notera que cette hypothèse plus faible n'implique même pas que f est continue.

I.3 SÉRIES DANS LES ESPACES NORMÉS

Définition I.3.1.

*Soit E un espace normé. On appelle série de terme général $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, dans E la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ et on note $\sum\limits_n x_n$ ou simplement $\sum x_n$. On dit que la série $\sum x_n$ est **convergente** (resp. **divergente**) si la suite $(S_n)_n$ est convergente (resp. divergente). Dans ce cas la limite s de la suite $(S_n)_n$ est applée la somme de la série $\sum x_n$ et on note $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Une série $\sum x_n$ est dite **absolument convergente** (ou **normalement convergente**) si la série numérique $\sum \|x_n\|$ est convergente.*

Dans un espace vectoriel, les séries convergentes (resp. absolument convergentes) pour deux normes équivalentes sont les même.

PROPOSITION I.3.1.

1. *On ne change pas la nature (convergence) d'une série dans un espace normé si on change un nombre fini de ses termes.*
2. *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé. Alors la suite $(x_n)_n$ et la série de terme général $x_{n+1} - x_n$ sont de même nature.*

PROPOSITION I.3.2.

Soient E un espace normé, $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries dans E et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. *Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont convergentes de sommes respectives x et y alors $\sum \lambda x_n + \mu y_n$ est convergente de somme $\lambda x + \mu y$.*

2. *Si $\sum x_n$ est convergente et si $\sum y_n$ est divergente alors $\sum x_n + y_n$ est divergente.*

Naturellement, si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont toutes deux divergentes on ne peut rien conclure.

PROPOSITION I.3.3.

Soient E_1 et E_2 deux espaces normés. Soient $\sum x_n^i$, $i = 1, 2$ une série dans E_i. Alors, dans l'espace normé produit $E_1 \times E_2$ la série $\sum (x_n^1, x_n^2)$ est convergente si et seulement si les deux séries $\sum x_n^i$, $i = 1, 2$ sont convergentes dans E_i. En particulier, dans l'espace normé euclidien $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ une série $\displaystyle\sum_p (x_p^1, \cdots x_p^n)$ est convergente (resp. absolument convergente) si et seulement si chacune des séries numériques $\sum x_p^i$, $1 \leq i \leq n$, est convergente.

PROPOSITION I.3.4 (CRITÈRE DE CAUCHY).

Soit E un espace normé.

1. *Si $\sum x_n$ est une série convergente (resp. absolument convergente) dans E alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous $p, q \geq n(\varepsilon)$, $q \geq p$, on a $\displaystyle\left\| \sum_{i=p}^{q} x_i \right\| \leq \varepsilon$ (resp. $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} \|x_i\| \leq \varepsilon$).*
2. *Si E est un espace de Banach alors une série $\sum x_n$ est convergente si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous $p, q \geq n(\varepsilon)$, $q \geq p$, on a $\displaystyle\left\| \sum_{i=p}^{q} x_i \right\| \leq \varepsilon$.*

THÉORÈME I.3.1.

Soit E un espace normé. Alors E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Remarque. Si $\sum x_n$ est une série convergente alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Mais la réciproque est bien sûr fausse comme le montre l'exemple $x_n = 1/n$ puisque $\forall n$, $\displaystyle\sum_{n}^{2n} \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}$.

PROPOSITION I.3.5.

Soit $\sum x_n$ une série dans un espace normé E. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante et posons $\displaystyle v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} x_k$. Alors si $\sum x_n$ est convergente il en est de même de $\sum v_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ (sommation par paquets).

La réciproque de cette Proposition est bien sûr fausse comme le montre l'exemple $x_n = (-1)^n$.

Définition I.3.2.

Une série $\sum x_n$ dans un espace normé est dite **commutativement convergente** *si, pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$ la série $\sum x_{\varphi(n)}$ est convergente et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$.*

PROPOSITION I.3.6.

Toute série convergente et absolument convergente est commutativement convergente.

PROPOSITION I.3.7.

Soit E une algèbre normée commutative, c'est-à-dire un espace normé qui est une algèbre commutative telle que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$. Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries dans E. On suppose que les deux séries sont convergentes et que l'une des deux est absolument convergente. Alors la série, dit **série produit**, *de terme général $\displaystyle w_n = \sum_{p+q=n} x_p y_q$ est convergente et, de plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)$. De plus si les deux séries sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ l'est aussi.*

THÉORÈME I.3.2 (THÉORÈME D'ABEL).

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries dans une algèbre de Banach commutative (i.e. une algèbre normée commutative complète). On suppose que :

(i) Il existe une constante M telle que, pour tous entiers n et m, $m \geq n$, $\left\| \sum_{i=n}^{m} y_i \right\| \leq M$;

(ii) $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < +\infty$.

Alors la série $\sum x_n y_n$ est convergente.

Comme exemple d'algèbres de Banach comutative on a bien sûr $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ mais aussi $\mathscr{B}(X;\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}(X;\mathbb{C})$ pour la norme de la convergence uniforme.

I.4 FONCTIONS CONTINUES

Définition I.4.1.

Soient X et Y deux espaces métriques, A une partie de X et f une fonction de A dans Y. Soit $a \in \bar{A}$. On dit que f a une limite l lorsque x tends vers a, $x \neq a$, et on écrit $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) a est un point d'accumulation de A ;

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que, pour $x \in B(a,r) \cap (A \setminus \{a\})$ on a $d(f(x), l) \leq \varepsilon$. Il revient au même de dire que, pour tout voisinage $V(l)$ de l dans Y il existe un voisinage $V(a)$ de a dans X tel que $f(V(a) \cap (A \setminus \{a\}) \subset V(l)$.

Noter que, dans cette définition, si $a \in A$ on n'impose pas $l = f(a)$.

PROPOSITION I.4.1.

Dans les conditions de la définition ci-dessus, a étant un point d'accumulation de A, on a $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A, telle que $x_n \neq a$, $\forall n$, et $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

PROPOSITION I.4.2.

Dans les conditions de la définition ci-dessus, si $Y = Y_1 \times Y_2$, et si $f = (f_1, f_2)$ alors, si $l = (l_1, l_2)$, on a $l = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$, si et seulement si , pour $i = 1, 2$ on a $l_i = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f_i(x)$.

Définition I.4.2.

*Soient X et Y deux espaces métriques. Soit A une partie de X et f une fonction de A dans Y. Soit $a \in A$. On dit que f est **continue au point a** si, pour tout voisinage $V(f(a))$ de $f(a)$ dans Y il existe un voisinage $V(a)$ dans X tel que $f(V(a) \cap A) \subset V(f(a))$. Il revient au même de dire que $f^{-1}(V(f(a)))$ est l'intersection avec A d'un voisinage de a dans X. On dit que f est **continue** si elle est continue en tout point de A.*

PROPOSITION I.4.3.

Dans les conditions de la définition ci-dessus, f est continue en $a \in A$ si :

- Ou bien a est un point isolé de A (i.e. il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A = \emptyset$) ;

- Ou bien a est un point d'accumulation de A et $f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} f(x)$.

Par suite, f est continue en a si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$. Bien sûr ici on n'impose pas $x_n \neq a$.

PROPOSITION I.4.4.

Dans les conditions de la définition précédente, supposons $X = X_1 \times X_2$ soit un espace métrique produit, et notons $a = (a_1, a_2)$. Soit $A_1 = \{x_1 \in X_1$ tels que $(x_1, a_2) \in A\}$ et $A_2 = \{x_2 \in X_2$ tels que $(a_1, x_2) \in A\}$. Si f est *continue au point a alors les fonctions $f_i : A_i \to Y$, $i = 1, 2$, définies par $f_1(x_1) = f(x_1 a_2)$ et $f_2(x_2) = f(a_1 x_2)$ sont continues.*

Remarque. On notera que la réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

n'est pas continue à l'origine.

1. Soient X un espace métrique, A une partie de X, et E un espace normé. Soit $a \in A$. Soient f et g deux fonctions de A dans E continues au point a. Pour tous scalaires λ et μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue q=au point a. La fonction fg est continue au point a. Si $g(a) \neq 0$, il existe $r > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $A \cap B(a, r)$ et la fonction f/g est définie sur $A \cap B(a, r)$ et est continue au point a.
2. Soient X, Y et Z trois espace métriques, A une partie de X, B une partie de Y, et $a \in A$, $b \in B$. Soient f une fonction de A dans B telle que $f(a) = b$ et g une fonction de B dans Z. Si f est continue en a et g continue en b alors $g \circ f$ est continue en a.

Exemple. 1. Soient X un espace métrique et A une partie de X. Pour tout x de X posons

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y)\, y \in A\}.$$

Alors la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est continue. Plus précisément, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

2. Sur $\mathbb{R}^n$ les fonctions polynômiales $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha$, I sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$ sont des fonctions continues.

PROPOSITION I.4.5.

Soient X est Y deux espaces métriques. Une fonction f de X dans Y est continue si et seulement si l'image réciproque par f d'un ouvert de Y est un ouvert de X.

Définition I.4.3.

*Soient X et Y deux espaces métriques et A une partie de X. Une fonction f de A dans Y est dite **uniformément continue** si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) < \eta$ implique $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

THÉORÈME I.4.1.

Soient E et F deux espaces normes et f une application linéaire de E dans F. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue ;

(ii) f est continue à l'origine ;

(iii) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < +\infty$;

(iv) Il existe une constante c telle que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq c\,\|x\|$.

*Si ces conditions sont satisfaites et si on pose $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ alors, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|f\|\,\|x\|$. De plus sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme appelée la **norme opérateur**.*

On notera que toute application linéaire continue est automatiquement uniformément continue.

Remarque. Si E_i, $1 \leq i \leq n$, et F sont des espaces normés et si $f : \prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ est une application multilinéaire, alors f est continue si et seulement si elle est continue à l'origine, ce qui est encore équivalent à $\sup_{\|x_i\| \leq 1} \|f(x)\| < +\infty$. Cette dernière quantité est une norme sur l'espace vectoriel des application multilinéaires continues de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F.

PROPOSITION I.4.6.

Soient E, F et G trois espaces normés. Si u (resp. v) est une application linéaire continue de E dans F (resp. de F dans G) alors $v \circ u$ est une application linéaire continue de E dans G et $\|v \circ u\| \leq \|v\|\,\|u\|$.

I.5 COMPACITÉ DANS LES ESPACES MÉTRIQUES

Soit X un espace métrique et Aune partie de X. On dit qu'une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E est un recouvrement ouvert de A si $\bigcup_{i\in I} O_i \supset A$. Dans ces condition, si J est une partie de I et si $\bigcup_{i\in J} O_i \supset A$, on dit que $(O_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement ouvert du recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$. Si tel est le cas, on dit aussi que $(O_i)_{i\in J}$ est un recouvrement ouvert de A extrait du recouvrement $(O_i)_{i\in I}$.

Définition I.5.1.

*Soient X un espace métrique et A une partie de X. On dit que A est **compacte** si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini.*

1. *Soient A et B deux parties d'un espace métrique $B \subset A$. Si A est compacte et si B est fermée alors B est compacte.*
2. *Toute partie compacte A d'un espace métrique X est bornée (i.e. si $x \in A$, $\sup_{y\in A} d(x,y) < +\infty$) et fermée.*

Remarque. La réciproque du 2. cette proposition est **fausse** en général.

PROPOSITION I.5.1.

Soit A une partie compacte d'un espace métrique X. Alors toute partie infinie de A possède un point d'accumulation (qui est dans A nécéssairement).

THÉORÈME I.5.1.

Soient X un espace métrique et A une partie de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est compacte ;

(ii) Toute suite de points de A possède une valeur d'adhérence dans A.

(iii) A est complète et, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayons inférieurs ou égaux à ε centrées en des points de A.

En particulier, une partie compacte est complète.

PROPOSITION I.5.2 (PROPRIÉTÉ DE LEBESGUE).

Soit A une partie compacte d'un espace métrique X. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout point x de A, il existe $i \in I$ tel que $B(x,\delta) \subset O_i$.

PROPOSITION I.5.3.

Soient X et Y des espaces métriques, A une partie compacte de X et f une fonction de A dans Y. Si f est continue, alors $f(A)$ est compact dans Y. En particulier f est bornée. De plus si $Y = \mathbb{R}$ f atteint ses bornes (i.e. il existe x_1 et x_2 dans A tels que $f(x_1) = \inf_{x\in A} f(x)$ et $f(x_2) = \sup_{x\in A} f(x)$.

PROPOSITION I.5.4.

Soient X et Y des espaces métriques, A une partie compacte de X et f une fonction continue de A dans Y. Alors $f$est uniformément continue.

Sans l'hypothèse de compacité sur A cette proposition peut être mise en défaut.

PROPOSITION I.5.5.

Soient X et Y deux espaces métriques, A une partie de X et B une partie de Y. Si A et B sont compactes alors $A \times B$ est compacte dans l'espace métrique produit $X \times Y$.

I.6 CONNEXITÉ PAR ARC, CONNEXITÉ

Définition I.6.1.

*Soient X un espace métrique et A une partie de X. On dit que A est **connexe par arc** si pour tout couple (x,y) de points de A il existe une fonction continue $f : [0,1] \to A$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Autrement dit s'il existe un chemin continu dans A joignant x à y.*

PROPOSITION I.6.1.

Soient X un espace métrique et A une partie de X. La relation $x\mathscr{R}y$ définie par « il existe un chemin continu dans A d'origine x et d'extrémité y » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les composantes connexes par arc de A. La composante connexe par arc d'un point de A est le plus grand connexe par arc contenant ce point.

PROPOSITION I.6.2.

Soit E un espace normé.

1. *Toute boule de E est connexe par arc.*
2. *Soit O un ouvert de E. Les composantes connexes par arc de O sont ouvertes.*
3. *Dans $\mathbb{R}$ les parties connexes par arc sont les intervalles.*
4. *Dans $\mathbb{R}$ tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

PROPOSITION I.6.3.

Soient X et Y deux espaces métriques et A une partie connexe par arc de X. Si f est une fonction continue de A dans Y alors $f(A)$ est connexe par arc.

CHAPITRE II

ESPACES NORMÉS DE DIMENSION FINIE

II.1 THÉORÈMES FONDAMENTAUX

THÉORÈME II.1.1.

Les parties compactes de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de la norme euclidienne sont les fermés bornés. Autrement dit tout ensemble infini borné de $\mathbb{K}^n$ possède un point d'accumulation.

PROPOSITION II.1.1.

Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de la norme euclidienne toute norme est continue.

1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*
2. *Soit E un espace vectoriel norme de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Alors l'application*

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$$

est un isomorphisme bicontinu (i.e. continu ainsi que son inverse) de $\mathbb{K}^n$ sur E. En particulier, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et les parties compactes sont les fermés bornés.

Soient E un epace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Toute application linéaire de E dans F est continue.

Si E n'est pas de dimension finie cette proposition est **fausse**.

THÉORÈME II.1.2 (THÉORÈME DE RIESZ).

Soit E un espace normé. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *E est de dimension finie ;*
2. *Toute boule fermée est compacte (on dit que E est localement compact) ;*
3. *Il existe deux réels r et r', $r' < r$ tels que l'on puisse recouvrir la boule ouverte $B(0, r)$ par un nombre fini de boules ouvertes $B(x_i, r')$ de rayons r'.*

II.2 SÉRIES DANS LES ESPACES NORMÉS DE DIMENSION FINIE

THÉORÈME II.2.1.

Soit E un espace normé de dimension finie. Soit $\sum x_n$ une série dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\sum x_n$ est absolument convergente.*
2. *Il existe une constante $M > 0$ telle que, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $\left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| \leq M$.*
3. *$\sum x_n$ est commutativement convergente.*

PROPOSITION II.2.1.

Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum x_n$ soit convergente mais pas absolument convergente. Alors, pour tout $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$, ($\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum x_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.

CHAPITRE III

CALCUL DIFFÉRENTIEL

III.1 FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Rappel. Une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ de dérivée L si, pour $|h| \leq \eta$, on a $f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + |h|\,\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On remarque alors que $h \mapsto Lh$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition III.1.1.

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. On dit que f est **différentiable** (ou **dérivable**) en x_0 s'il existe une application linéaire $df(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que, pour $x_0 + h \in \Omega$ on a*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0) \bullet h + \|h\|\,\varepsilon(h),$$

*avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si Ω_1 est un ouvert de Ω, on dit que f est **différentiable sur $\boldsymbol{\Omega_1}$** si elle est différentiable en tout point de Ω_1. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur Ω, et on écrit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, si elle est différentiable en tout point de Ω et si $x \mapsto df(x)$ est continue de Ω dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.*

En utilisant la notation classique $\boldsymbol{o}(h)$ qui signifie $\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\boldsymbol{o}(h)}{\|h\|} = 0$, il revient au même d'écrire $f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0) \bullet h + \boldsymbol{o}(h)$. On remarquera qu'une fonction différentiable en x_0 est **nécéssairement continue** en x_0, puisque toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continue.

Remarque. Par convention une fonction continue sur Ω est dite de classe $\mathscr{C}^0$ et on note $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$.

PROPOSITION III.1.1.

*Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en x_0, l'application linéaire $df(x_0)$ est unique. Elle s'appelle la **différentielle de f en $\boldsymbol{x_0}$**.*

Exemple.

1. Cas $n = m = 1$...
2. Si $n = 1$, on identifie généralement tout application linéaire $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ avec sa valeur en 1 (car $g(h) = hg(1)$). Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, est différentiable en $x_0 \in \Omega$, on note alors $f'(x_0) = df(x_0) \bullet 1$ et on a $f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.
3. Supposons $m = 1$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, différentiable en $x_0 \in \Omega$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, posons $V_i = df(x_0) \bullet (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ (i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Alors, pour $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(x_0) \bullet h = \sum_{i=1}^{n} h_i V_i = \langle V, h \rangle.$$

Le vecteur $V = (V_1, \cdots, V_n) \in \mathbb{R}^n$ s'appelle le **gradient** de f au point x_0 et se note $\nabla f(x_0)$. Avec ces notations,

$$df(x_0) \bullet h = \langle \nabla f(x_0), h \rangle = \langle h, \nabla f(x_0) \rangle .$$

4. Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est différentiable et $df(x_0) = f$ en tout point x_0.

5. Soient n_i, $1 \leq i \leq p$ des entiers. Toute application multilinéaire $f : \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en tout point $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i}$, et, pour $h = (h_1, \cdots, h_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i}$, $h_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, on a

$$df(x_0) \bullet h = \sum_{i=1}^{p} f(x_0^1, \cdots h_i, \cdots, x_0^p).$$

PROPOSITION III.1.2.

1. *Soient f et g deux applications d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. On suppose f et g différentiable en x_0.*
   (a) *Pour tout réels λ et μ, $\lambda f + \mu g$ et différentiable en x_0 et $d(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda df(x_0) + \mu dg(x_0)$;*
   (b) *Si $m = 1$, fg est différentiable en x_0 et $dfg(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$;*
   (c) *Si $m = 1$ et si $g(x_0) \neq 0$, f/g est différentiable en x_0 et $d(f/g)(x_0) = \dfrac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g(x_0)^2}$.*
2. *Soient Ω_1 (resp. Ω_2) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$), f (resp. g) une application de Ω_1 dans $\mathbb{R}^m$ (resp. de Ω_2 dans $\mathbb{R}^p$) et x_0 un point de Ω_1 tel que $f(x_0) = y_0 \in \Omega_2$. Alors si f (resp. g) est différentiable en x_0 (resp. y_0), $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et est différentiable en x_0. De plus $f(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.*

Remarque. Le (b) du 1. se généralise à m quelconque de la manière suivante : si ψ est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et si f et g sont deux applications d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ différentiables en x_0, alors l'application $x \mapsto \psi(f(x), g(x))$ est différentiable en x_0 et sa différentielle au point x_0 est $h \mapsto \psi(df(x_0) \bullet h, g(x_0)) + \psi(f(x_0), dg(x_0) \bullet h)$.

PROPOSITION III.1.3.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. Soient f_i, $1 \leq i \leq m$, les composantes de f. Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si, $\forall i$, f_i est différentiable en x_0. De plus, pour tout i, $p_i \circ df(x_0) = d(f_i)(x_0)$ où p_i désigne la i-eme projection de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION III.1.4.
Soit $\mathscr{GL}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$. Alors (pour la norme des applications linéaires) $\mathscr{GL}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et l'appication $\Phi : \mathscr{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\Phi(u) = u^{-1}$ est différentiable en tout point u_0 de $\mathscr{GL}(\mathbb{R}^n)$ et on a $d\Phi(u_0) \bullet h = -u_0^{-1} \circ h \circ u_0^{-1}$, $\forall h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

III.2 DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR, DÉRIVÉES PARTIELLES

Définition III.2.1.
*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$ et $X \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est **différentiable dans la direction X en x_0** si l'application $t \mapsto f(x_0 + tX)$, qui est définie de $]-\eta, +\eta[$ dans $\mathbb{R}^m$, est différentiable en $t = 0$. Si $m = 1$ on dit aussi que f est dérivable dans la direction X. La différentielle de $t \mapsto f(x_0 + tX)$ en 0 est notée $df_X(x_0)$. Si $m = 1$, la dérivée de cette fonction est notée $\dfrac{\partial f}{\partial X}(x_0)$.*

PROPOSITION III.2.1.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0 alors elle est différentiable dans toute direction $X \in \mathbb{R}^n$ en x_0. De plus, pour $h \in \mathbb{R}$, $df_X(x_0) \bullet h = hdf(x_0) \bullet X$. En particulier, si $m = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial X}(x_0) = df(x_0) \bullet X$.

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, si $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, pour $X = (\alpha, \beta)$, on a $f(tX) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ si $X \neq 0$ et $f(tX) = 0$ si $X = 0$. Ainsi f est différentiable dans toute direction X à l'origine et $\dfrac{\partial f}{\partial X}(0,0) = 0$ bien qu'elle ne soit pas continue en ce point.

PROPOSITION III.2.2.

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$. Soit $1 \leq i \leq n$. Si f est différentiable en x_0 dans la direction e_i du i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$) on dit que f à une **i-ème différentielle partielle** et on note $df_{e_i}(x_0) = df_i(x_0)$. Si $m = 1$, on dit que f a une **i-ème dérivée partielle** et on note $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque.

1. L'existence des dérivées partielles n'entraine pas l'existence d'une dérivée dans une direction quelconque.
2. Les différentielles partielles ont les même propriétés algébriques que les différentielles : $d(\lambda f + \mu g)_X(x_0) = \lambda df_X(x_0) + \mu dg_X(x_0)$, $d(fg)_X(x_0) = g(x_0)df_X(x_0) + f(x_0)dg_X(x_0)$...
3. si $f = (f_1, \cdots, f_m)$ il ne faut pas confondre df_i $1 \leq i \leq n$, et $d(f_i)$, $1 \leq i \leq m$: la première appartient à $\mathscr{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ et la seconde à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

PROPOSITION III.2.3.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}$, si f est différentiable dans la direction X en x_0, on a $df_X(x_0) \bullet h = h\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial X}(x_0), \cdots, \dfrac{\partial f_m}{\partial X}(x_0)\right)$. En particulier, si f admet une i-ème différentielle partielle en x_0, $df_i(x_0) \bullet h = h\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \cdots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)\right)$.

PROPOSITION III.2.4.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$. Pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

1. *$df(x_0) \bullet h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} df_i(x_0) \bullet h_i$;*
2. *Pour $1 \leq j \leq m$, $(p_j \circ df(x_0)) \bullet h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) = d(f_j) \bullet h$.*

Autrement dit, la matrice de $df(x_0)$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

*Cette matrice s'appelle la **matrice Jacobienne de f au point x_0**. Lorsque $n = m$, le déterminant de cette matrice est appelé le **Jacobien de f au point x_0**. Si $m = 1$, $\nabla f(x_0) = Jf(x_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$.*

Remarque. L'existence de la matrice Jacobienne n'entraine pas la différentiabilité.

PROPOSITION III.2.5.

La matrice Jacobienne possède les même propriétés algébriques que la différentielle :

1. *$J(\lambda f + \mu g) = \lambda Jf + \mu Jg$;*
2. *Si $m = 1$, $J(fg)(x_0) = g(x_0)Jf(x_0) + f(x_0)Jg(x_0)$;*
3. *Si $m = 1$ et $g(x_0) \neq 0$, $J\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{g(x_0)Jf(x_0) - f(x_0)Jg(x_0)}{(g(x_0))^2}$;*
4. *$J(g \circ f)(x_0) = Jg(f(x_0))Jf(x_0)$; en particulier, pour $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq i \leq n$, on a $\dfrac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x_0) = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_l}(f(x_0)) \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x_0)$.*

III.3 LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

THÉORÈME III.3.1 (Théorème des accroissements finis).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω et f soit différentiable en tout point de $]x, y[$ et continue sur $[x, y]$. Alors il existe $\vartheta \in]0, 1[$ tel que

$$f(y) = f(x) + df(x + \vartheta(y - x)) \bullet (y - x).$$

En d'autres termes, $f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x_0 + \vartheta(y - x), y - x \rangle$.

Remarque. On notera que ce résultat est, en général **faux** pour des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq 2$, comme le montre l'exemple $f(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ de $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, puisque $f(0) - f(2\pi) = (0, 0)$ et $f'(\vartheta) = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) \neq (0, 0)$.

THÉORÈME III.3.2 (Théorème des accroissements finis).

Soit $[a, b]$ un intervale de $\mathbb{R}$. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $]a, b[$ telles que $\|df(x)\| \leq g'(x)$, pour tout $x \in]a, b[$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

En particulier, si $\sup_{x \in]a,b[} \|df(x)\| \leq k < +\infty$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leq k(b - a)$.

Remarque. La démonstration montre que ce résultat est encore vrai si on suppose seulement les fonctions f et g dérivables à droite (ou à gauche).

THÉORÈME III.3.3 (Théorème des accroissements finis).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω et f soit différentiable en tout point de $]x, y[$ et continue sur $[x, y]$. Alors

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{\xi \in]x,y[} \|df(\xi)\|.$$

COROLLAIRE.

Soient Ω un ouvert connexe par arc (en fait connexe) de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction différentiable de Ω dans $\mathbb{R}^m$. Si $df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ alors f est constante.

THÉORÈME III.3.4.

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction différentiables de Ω dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que :

1. *Il existe $x_0 \in \Omega$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge dans $\mathbb{R}^m$;*
2. *La suite $(df_n)_n$ converge uniformément sur Ω vers $g : \Omega \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ (i.e. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|df_n(x) - g(x)\| = 0$.*

Alors :

1. *Pour tout $x \in \Omega$ la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{R}^m$;*
2. *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur toute partie bornée de Ω ;*
3. *La fonction limite f est différentiable sur Ω et $df = g$.*

Remarque. Dans le cas où Ω est seulement supposé connexe par arc, le 2. de la conclusion est à remplacer par : converge uniformément sur tout compact de Ω.

THÉORÈME III.3.5.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$. Soit $x_0 \in \Omega$. Si, pour tout j, $1 \leq j \leq m$, f_j admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$, en tout point x d'un voisinage de x_0 et si les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ sont continues en x_0 alors f est différentiable en x_0. En particulier, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ si et seulement si, pour tout j, $f_j \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, si et seulement si, pour tous i et j $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \in \mathscr{C}(\Omega)$.

Remarque. La démonstration du théorème precedent montre qu'il suffit de supposer que les dérivées partielles $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$, existent au voisinage de x_0, exepté, éventuellement, en x_0, et ont une limite en x_0. Ces limites définissent une application linéaire g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et f est différentiable en x_0 de différentielle g.

III.4 DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR, FORMULE DE TAYLOR

Définition III.4.1.

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. On dit que f est **deux fois différentiable en x_0** s'il existe un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de x_0 sur lequel f est différentiable et si l'application $x \mapsto df(x)$, de V dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est différentiable au point x_0. La différentielle de df en x_0 est notée $d^2 f(x_0)$ et s'appelle la **différentielle seconde de f en x_0** ; c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. On dit que f est deux fois **différentiable sur Ω** si elle est différentiable en tout point de Ω ainsi que df. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, et on écrit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ si elle est deux fois différentiable sur Ω et si $d^2 f$ est continue de Ω dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$.*

Remarque.

1. $d^2 f(x_0)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ signifie que, pour $h \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(x_0) \bullet h$ est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. On peut donc appliquer cette dernière fonction a un élément k de $\mathbb{R}^m$: $(d^2 f(x_0) \bullet h) \bullet k$. Il est alors clair que l'application $(h, k) \mapsto (d^2 f(x_0) \bullet h) \bullet k$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. **On identifie toujours $d^2 f(x_0)$ à cette application bilinéaire : $(h, k) \mapsto d^2 f(x_0) \bullet (h, k) = (d^2 f(x_0) \bullet h) \bullet k$. Ainsi $d^2 f(x_0)$ est toujours considérée comme une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$** (cette identification n'est autre que l'identification canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ avec l'espace des application bilinéaires $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.
2. f est deux fois différentiable en x_0 si elles est différentiable dans un voisinage de x_0 et s'il existe une application bilinéaire $g(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que, pour $h, k \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|$ assez petit, on a
$$df(x_0 + h) \bullet k - df(x_0) \bullet k - g(x_0) \bullet (h, k) = \boldsymbol{o}(\|h\| (\|h\| + \|k\|)).$$
3. Si $n = 1$, $d^2 f(x_0) \bullet (h, k) = hkd^2 f(x_0)(1, 1)$ et on identifie toujours $d^2 f(x_0)$ et $d^2 f(x_0)(1, 1)$. Ainsi, si $n = m = 1$, on retrouve la définition usuelle de dérivée seconde.

THÉORÈME III.4.1 (Théorème de Schwarz).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. Si f est deux fois différentiable en x_0 alors l'application bilinéaire $d^2 f(x_0)$ est symétrique (i.e. $d^2 f(x_0) \bullet (h, k) = d^2 f(x_0) \bullet (k, h)$.

Exemple.

1. Toute application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est deux fois différentiable et $d^2 u = 0$.
2. Soient n_i, $1 \leq i \leq p$ des entiers. Toute application multilinéaire $f : \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^m$ est deux fois différentiable en tout point $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i}$, et, pour $h = (h_1, \cdots, h_p), k = (k_1, \cdots, k_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i}$, $h_i, k_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, on a
$$d^2 f(x_0) \bullet (h, k) = \sum_{i<j} f(\xi_{ij}(x_0, h, k)) + f(\xi_{ji}(x_0, k, h)),$$
où $\xi_{ij}(x_0, h, k)$ est le point de $\prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i}$ dont toutes les coordonnées sont égales à celles de x_0 sauf la i-ème qui est h_i et la j-ème qui est k_j. En particulier, si $p = 2$, $d^2 f(x_0)$ est l'application bilinéaire symétrique $(h, k) \mapsto f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2)$, et $x \mapsto d^2 f(x)$ est constante.

Définition III.4.2.

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. Pour $1 \leq i, k \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, on dit que f admet une **dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x_0)$ au point x_0** si elle admet une dérivée partielle $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ au voisinage de x_0 et si la fonction $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ admet une dérivée partielle par rapport à x_k au point x_0. Par récurrence, on définit ainsi les dérivées successives $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(x_0)$. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^k$** (resp. **de classe $\mathscr{C}^\infty$**) sur Ω, et on note $f \in \mathscr{C}^k(\Omega)$, si elle possède, en tout point de Ω, des dérivées partielles d'ordre $\leq k$ (resp à tous ordres) dans toutes les directions continues sur Ω.*

PROPOSITION III.4.1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. Si f est deux fois différentiable au point x_0 alors, pour tous i, k, j f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x_0)$ et $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x_0) = p_j \circ d^2 f(x_0) \bullet (e_i, e_k)$, si e_l désigne le l-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque.

1. L'existence des dérivées partielles secondes n'entraine pas que la fonction est deux fois différentiable. Ces dérivées peuvent même exister sans que les dérivées croisées soient égales. Par exemple la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ a des dérivées partielles vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et, donc, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.
2. Si f est deux fois différentiables, le Théorème de Schwarz et la Proposition précédente montre que les dérivées partielles croisées existent et sont égales. La même preuve montre aussi que si, pour j, i et k fixés, les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x)$ et $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x)$ existent au voisinage de x_0 et sont continues en x_0 alors elles sont égales.
3. Si f admet des dérivées partielles secondes dans toutes les directions sur un voisinage de x_0 et si celle-ci sont continues en x_0 alors f est deux fois différentiable en x_0.
4. De la même manière que l'on a défini la différentielle seconde, on pourait définir la différentielle d'ordre p en un point x_0 et on nontrerait qu'elle est une application multilinéaire symétrique de $(\mathbb{R}^n)^p$ dans $\mathbb{R}^m$.

PROPOSITION III.4.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \Omega$. Si f admet des dérivées partielles d'ordre p en tout point d'un voisinage de x_0 et si celles-ci sont continues en x_0 alors les dérivées partielles d'ordre $\leq p$ en x_0 sont indépendantes de l'ordre de dérivation. Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note alors $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x_0) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x_0)$, où, dans la seconde expression ∂x_i apparait α_i fois, l'ordre étant quelconque.

PROPOSITION III.4.3.

Les dérivées partielles d'ordre p vérifient les même propriétés algebriques que les dérivées partielles d'ordre 1. De plus, la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ est de classe $\mathscr{C}^p$.

Exemple.

1. Soient n_i, $1 \leq i \leq p$ des entiers. Toute application multilinéaire $f : \prod_{i=1}^{p} \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit $\mathscr{GL}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$. Alors l'appication $\Phi : \mathscr{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\Phi(u) = u^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice.

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^p(\Omega)$, à valeurs réelles, et $\alpha \in \mathbb{N}^p$. Alors $\dfrac{\partial^{|\alpha|}(fg)}{\partial x^\alpha} = \displaystyle\sum_{\alpha \leq \beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\beta} \dfrac{\partial^{|\alpha-\beta|} g}{\partial x^{\alpha-\beta}}$, où, $\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout i, et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$.
2. Soient $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x > 0\}$, $\Omega_2 =]0, +\infty[\times] - \pi/2, \pi/2[$. Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de Ω_1 dans $\mathbb{R}$ et $h : \Omega_2 \to \Omega_1$ définie par $h(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = (x,y)$. On pose $g = f \circ h$. Alors, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ étant le Laplacien, on a
$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} \right) \circ h^{-1}(x,y).$$

THÉORÈME III.4.2 (Formule de Taylor).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, x et y deux points de Ω tels que le segment $[x,y]$ soit contenu dans Ω. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une *fonction de clase $\mathscr{C}^{p+1}$. Alors, en posant $h = y - x$, il existe $\vartheta \in]0, 1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x+\vartheta h) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + (p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 D^\alpha f(x+th)(1-t)^p dt, \end{aligned}$$

où $h^\alpha = \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i}$, $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ et la convention $D^0 f = f$, où $O = (0, \cdots, 0)$.

Remarque. Dans le théorème ci-dessus, la seconde formule, dite **formule de Taylor avec reste intégral**, est valable pour des fonction à valeurs complexes.

PROPOSITION III.4.4 (Extremas d'une fonction de deux variables).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ et f une fonction réelle de $\mathscr{C}^3(\Omega)$.

1. *Si f a un extremum local en (x_0, y_0) alors $df(x_0, y_0) = 0$.*
2. *On suppose $df(x_0, y_0) = 0$ et on pose $r_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Si $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$ alors f possède un extremum local en (x_0, y_0) qui est un maximum (resp. minimum) si $r_0 > 0$ (resp. $r_0 < 0$). Si $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$ f présente un col au point (x_0, y_0). Si $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$ on ne peut rien conclure.*

III.5 THÉORÈMES D'INVERSION LOCALE ET DES FONCTIONS IMPLICITES

Définition III.5.1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 0$, sur Ω si elle est bijective bicontinue et si f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^k$.

Si f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geq 1$, alors, pour tout $x \in \Omega$, $df(x)$ est un isomorphisme.

THÉORÈME III.5.1 (Théorème d'inversion locale).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$. Si $df(x_0)$ ets un isomorphisme (i.e. $\det Jf(x_0) \neq 0$), il existe un voisinage ouvert V de x_0 et un voisinage ouvert W de $f(x_0)$ tels que f soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ de V sur W.

Remarque. Le fait que $df(x)$ soit un isomorphisme en tout point n'entraine pas que f soit un difféomorphisme global (i.e. soit globalement injective) comme le montre l'exemple $f(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ sur $\{(r, \vartheta)$ tels que $r > 0\}$ ($\det Jf(r, \vartheta) = r \neq 0$).

THÉORÈME III.5.2 (Théorème des fonction implicites).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, (x_0, y_0) un point de Ω et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $f(x_0, y_0) = 0$. Si le différentielle au point y_0 de la fonction $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ (qui est définie au voisinage de y_0) est un isomorphisme (i.e. $\det Jf_{x_0}(y_0) \neq 0$) alors il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans Ω, un voisinage ouvert W de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $g : W \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que la relation

$$(x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0$$

équivaut à la relation

$$x \in W \text{ et } y = g(x).$$

De plus, si $J_y f$ désigne la matrice Jacobienne de la fonction $y \mapsto f(x, y)$, $x \in W$, alors $J_y f(x, g(x))$ est inversible et, pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x), \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)\right) = -J_y f(x, g(x))^{-1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x, g(x)), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x, g(x))\right).$$

Exemple (Courbes et surfaces définies par une équation implicite). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^k$ dans un voisinage ouvert de $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ telle que l'équation $f(x_1, \cdots x_n) = 0$, dans un voisinage ouvert de a soit équivalente à $x_n = g(x_1, \cdots x_{n-1})$. de plus

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \cdots x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots x_{n-1}, g(x_1, \cdots x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_{n-1}, g(x_1, \cdots x_{n-1}))}.$$

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 0$ avec $\nabla f \neq 0$.
Courbes dans $\mathbb{R}^3$. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = 0$ avec ∇f_1 et ∇f_2 linéairement indépendants.