Université Bordeaux I **Analyse 2 (MHT 302)**

Feuille d'exercices N. 2 : Compacité, limites, continuité

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Exercice 1. (Un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}^d$)
Par définition, un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est dit dense dans $\mathbb{R}^d$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ il y a un $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$ (ou bien $x \in B(a,\varepsilon)$). Montrer que cela équivaut aux propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Cette intersection est-elle finie ? infinie ?
- $\bar{A} = \mathbb{R}^d$,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il y a une suite $(a^n) \subset A$ telle que $x = \lim_{n\to\infty} a^n$. (Attention : a^n ne désigne pas une puissance !)
- Donnez trois exemples d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (Complétude de $\mathbb{R}^d$)

1. Rappelez les définitions d'une suite convergente et d'une suite de Cauchy.
2. Montrez qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
3. Montrez que $\mathbb{R}^d$ est complet, c.à.d., toute suite de Cauchy est une suite convergente.
   Indication : utilisez la complétude de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? (Démonstration ou contre-exemple selon les cas)

1. Une intersection (finie ou infinie) de compacts est un compact.
2. Une réunion finie de compacts est un compact.
3. Une réunion arbitraire de compacts est un compact.
4. Le complémentaire d'un compact est un compact.
5. Les ensembles
$$\{(x,y) : 2x^2 + 3y^2 < 1\}, \quad \{(x,y) : 3x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}$$
sont compacts.
6. Les ensembles
$$\{(x,y) : 0 \leqslant x, y,\ xy < 1\}, \quad \{(x,y) : 0 \leqslant x, y,\ xy \leqslant 1\}$$
sont compacts.

7. Soient A, B compacts dans $\mathbb{R}$. $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ est un compact.

Exercice 4. (Ensembles totalement bornés)
Un ensemble A est dit *totalement borné*, si pour tout $\varepsilon > 0$ existent $x^1, \dots x^n \in \mathbb{R}^d$ (un nombre fini des points, $n = n_\varepsilon$) tels que $A \subset \cup_{i=1}^n B(x^i, \varepsilon)$.

Montrez que A est compact ssi A est totalement borné et fermé.

Exercice 5. Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{2x^3+yz^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 7. Déterminer les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}.$$

Exercice 8. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ par

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

et $f_1((0,0)) = f_2((0,0)) = 0$.

Exercice 9. La fonction $f(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ de la manière suivante (respectivement) :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^4y}{x^4+y^6},$$

$$\frac{xy^4}{x^4+y^6}, \quad y^2 \sin\frac{x}{y}$$

et $f((0,0)) = 0$. Étudier sa continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soient $f, g : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ deux applications continues.

1. Montrer que $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{d_1}, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{d_1}$.
2. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leqslant 1\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$, et que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. En utilisant la question 2. et l'application $(x, y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ répondre à la question suivante : l'image d'un fermé par une application continue est-elle fermée ?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit le graphe de f, ensemble noté Γ par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$$

Montrer que Γ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-ce vrai si l'application n'est pas continue ?

Exercice 12. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue là-dessus, $f \in C(K)$. Montrer qu'existent $x_{\min}, x_{\max} \in K$ tels que

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in K} f(x), \qquad f(x_{\max}) = \sup_{x \in K} f(x),$$

c.à.d., f atteint sa valeur minimale/maximale sur K.

Cette conclusion reste-t-elle vraie si on suppose seulement K fermé ?

Exercice 13. Soit $K \subset \mathbb{R}^{d_1}$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}^{d_2}$ une fonction continue. Montrez que $f(K)$ est aussi compact.