Université Bordeaux I **Analyse 2 (MHT 302)**

Compléments : différentiabilité, dérivées partielles, etc.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Exercice 1. Etudier la différentiabilité de fonctions suivantes et trouver la différentielle lorsqu'elle existe.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y, & f(x,y) &= (y^3 + 2x^2y + 3)^2, \\ f(x,y) &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, & f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ f(x,y) &= \log(x + \sqrt{x^2+y^2}), & f(x,y) &= \arctan\frac{x+y}{x-y}, \\ f(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & f(x,y,z) &= e^{xy\sin z}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Trouver la différentielle de la fonction au point (x,y) donné :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & &(1,1),\ (0,1), \\ f(x,y) &= \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}, & &(\frac{\pi}{4},\pi), \\ f(x,y) &= \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, & &(2,1). \end{aligned}$$

Exercice 3.

– Trouver la dérivée directionelle $D_v f(x^0)$, où :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 5y^2, & v &= (-1,1), x^0 = (1,1), \\ f(x,y) &= x\sin(x+y), & v &= (-1,0), x^0 = (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}), \\ f(x,y,z) &= x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, & v &= (\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}), x^0 = (1,2,1). \end{aligned}$$

– Calculer le gradient de la fonction au point x^0 :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2y^3,\ x^0 = (-1,1), & f(x,y) &= yx^y,\ x^0 = (2,1), \\ f(x,y,z) &= \arctan\frac{xy}{z^2},\ x^0 = (0,1,2), & f(x,y,z) &= \exp(x+xy+xyz),\ (x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$