

Feuille d'exercices n°4

Différentielles premières : homogénéité, accroissements finis

Exercice 1. Soit f une application de classe C^p de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(tx_1, \dots, tx_d) = t^p f(x_1, \dots, x_d)$.

(ii) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$.

(Indication : il pourra être utile d'introduire la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(tx)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé ; pour la réciproque, se ramener à l'équation différentielle $t\varphi'(t) = p\varphi(t)$ qu'on résoudra pour $t > 0$ et $t < 0$.)

Exercice 2. (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x) = (x^2, x^3)$. Vérifiez le théorème des accroissements finis sur $I = [0, 1]$: $\|f(1) - f(0)\| \leq |1 - 0| \cdot \sup_{x \in I} \|df(x)\|$. Existe-t-il $c \in I$ tel qu'on ait l'égalité des accroissements finis ?

(2) Mêmes questions avec $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $I = [0, 2\pi]$.

Différentielles et dérivées partielles secondes, extrema

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 \operatorname{Arctan} \frac{x}{y} - x^2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$ si $xy \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$.

(1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

(2) Montrer que f admet des dérivées partielles premières continues sur \mathbb{R}^2 .

(3) Justifier que f est continûment différentiable sur \mathbb{R}^2 .

(4) Montrer que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(5) Montrer que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0)$ existent (les calculer). Les fonctions $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ sont-elles continues sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 4. (1) Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $(F(x, y))(u, v) = (y + 3x^2)u + xv$.

- a) Montrer que F est différentiable et déterminer sa différentielle (on précisera l'application $(h, k) \mapsto \varepsilon((h, k))$).
- b) Vérifier que $(F'(x, y)(u, v))(h, k) = (F'(x, y)(h, k))(u, v)$ (où F' désigne la différentielle de F : c'est la même chose que dF ou DF).

(2) Déterminer la différentielle de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x^3$.

Que représente F pour la fonction f ?

(3) Déterminer la matrice H telle que $(F'(x, y)(u, v))(h, k) = (h, k)H^t(u, v)$.

Que représente la matrice H par rapport à f ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}f(0, 0) = 0$. En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, montrer qu'il existe des fonctions U, V et W continues sur \mathbb{R}^2 telles que pour tout x, y dans \mathbb{R}^2 on ait

$$f(x, y) = x^2U(x, y) + 2xyV(x, y) + y^2W(x, y).$$

Que valent $U(0, 0)$, $V(0, 0)$ et $W(0, 0)$?

Sous quelle condition sur la matrice $\begin{pmatrix} U(0, 0) & V(0, 0) \\ V(0, 0) & W(0, 0) \end{pmatrix}$ existe-t-il un $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$, $f(x, y)$ soit positive.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y + x^2 + y^2$. Déterminer l'ensemble des points (x, y) tels que $df(x, y) = 0$. Pour chacun d'eux, préciser s'il s'agit d'un extremum local ; dans ce cas, préciser sa nature (minimum ou maximum), et si c'est un extremum global.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Montrer que $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ s'annule en quatre points. Quels sont ses extrema locaux ? Préciser leur nature.

Exercice 8. Soient a, b, c trois réels > 0 ,

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

et $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$.

(1) Montrer que f atteint un maximum sur T en un unique point. (On pourra considérer \overline{T} .)

(2) Déterminer ce point et la valeur du maximum.

Équations aux dérivées partielles.

Exercice 9. On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$, où a est un réel.

(1) On note f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

(2) En déduire que $g(x, y) = \frac{a}{2}(x - y) + F(x + y)$ où F est une fonction arbitraire de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 10. On cherche toutes les fonctions f de classe C^1 dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

(1) Montrer que $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = a$.

(2) Conclure.

Exercice 11. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant les conditions :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x, 0) = x \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Soit $\varphi(u, v) = f\left(-\frac{1}{3}(u - 2v), v\right)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $f(x, y) = \varphi(-3x + 2y, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \frac{4}{3}\varphi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(3) En déduire que $\varphi(u, v) = \varphi(u, 0)e^{4v/3}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(4) Grâce aux conditions sur f , calculer $\varphi(u, 0)$. En déduire $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Fonctions implicites

Exercice 12.

1. En utilisant le calcul différentiel sur \mathbb{R} , montrer que pour tous $x > 0$, $y > 0$, il existe un unique $z = z(x, y) > 0$ tel que $ze^z = xe^x + ye^y$, et que la fonction $(x, y) \mapsto z(x, y)$ est de classe C^1 .
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
3. Montrer que la fonction $u(x, y) = \frac{x+z}{y+z}$ est de classe C^2 et calculer sa différentielle.

Exercice 13. Calculer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction Φ définie implicitement par la relation $\arctan(x\Phi(x)) + 1 = e^{x+\Phi(x)}$ au voisinage de $(0, 0)$.