Année universitaire 2011-2012
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Devoir surveillé

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

a. Exprimer $(X_1 - X_2)^4 + (X_2 - X_3)^4 + (X_3 - X_1)^4$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b. Posons $P = X^3 + X^2 - X - 7$ et notons a, b, c les racines de P dans $\mathbb{C}$. Calculer $(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4$.

Exercice 2

Pour tout nombre premier p et tout $F \in \mathbb{Z}[X]$, on note ici F_p la réduction de F modulo p, de sorte que $F_p \in \mathbb{F}_p[X]$.

On pose $F = X^3 - 3X^2 - 1$. Trouver tous les nombres premiers p tels que F_p ait une racine double (*i.e.* de multiplicité 2) dans $\mathbb{F}_p$.

Exercice 3

Soit K un corps. Soit $P \in K[X]$ de degré $d \geq 1$. Posons $A = K[X]$. Soit $Q \in A[Y]$ unitaire de degré $e \geq 1$ en Y. On pose $B = K[X;Y]/\langle P;Q \rangle$.

a. Montrer que B est un K-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension (on pourra expliciter une base).

b. Prouver que le morphisme canonique $K \to B$ est injectif.

Exercice 4

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$. Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier u_p est divisible par p.

a. Soit A un anneau tel que $pa = 0$ pour tout $a \in A$. Montrer que l'application $\varphi : A \to A$ qui à a associe a^p est un morphisme d'anneaux.

Posons $P = X^3 - X - 1$, $Q = Y^2 + XY + X^2 - 1$, et $B = \mathbb{F}_p[X;Y]/\langle P;Q \rangle$. Notons i l'unique morphisme $\mathbb{Z} \to B$. Désignons par x la classe de X dans B et par y celle de Y. On pose $z = -x - y$.

b. Vérifier que $P(x) = P(y) = P(z) = 0$.

c. Montrer que $i(u_n) = x^n + y^n + z^n$ pour tout $n \geq 0$.

d. Conclure.