Année universitaire 2009-2010
Licence 3 de mathématiques
Algèbre 4 - Seconde session

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Exercice 1

a. Exprimer $(X_1+X_2)(X_1+X_3)(X_2+X_3)$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires Σ_1, Σ_2, Σ_3.

b. On pose $P = X^3 - 3X^2 - X - 2$ et on note a, b, c les racines complexes de P. Calculer $(b^{-1}a+1)(c^{-1}b+1)(a^{-1}c+1)$.

Exercice 2

On pose $A = \mathbb{R}[X]$ et $B = \mathbb{R}[X;Y]/\langle Y^2 + X^4 - 1\rangle$. On désigne par x la classe de X dans B et par y la classe de Y dans B.

a. Prouver que l'anneau B est intègre.

b. Montrer que pour tout $b \in B$, il existe un unique couple $(P;Q) \in A^2$ tel que $b = P(x) + yQ(x)$.

Notons $N : B \to A$ l'application définie par $N\Big(P(x) + yQ(x)\Big) = P^2 + (X^4 - 1)Q^2$ pour tout $(P;Q) \in A^2$.

c. Vérifier que $N(b_1 b_2) = N(b_1)N(b_2)$ pour tout $(b_1;b_2) \in B^2$.

d. Déterminer le groupe B^* des inversibles de B.

e. Montrer que pour tout $b \in B$ non nul, le polynôme $N(b)$ est de degré pair.

f. Montrer que l'élément x est irréductible dans B.

g. L'anneau B est-il factoriel ?

Exercice 3

Soient p un nombre premier et K un corps de caractéristique p. Soit $b \in K$; posons $Q = X^p - X - b$. On choisit une extension de décomposition L de $Q \in K[X]$.

a. Prouver que l'application $\varphi : L \to L$ qui à x associe x^p est un morphisme d'extensions de $\mathbb{F}_p$.

b. Choisissons une racine α de Q dans L. Montrer l'égalité $Q = \prod_{k \in \mathbb{F}_p} (X - \alpha - k)$ dans $L[X]$ (*indication :* on pourra d'abord calculer $Q(\alpha + k)$ pour tout $k \in \mathbb{F}_p$). En déduire que $L = K(\alpha)$.

c. Soit $P = X^d - a_1 X^{d-1} + \cdots + (-1)^d a_d$ un facteur unitaire de Q dans $L[X]$. Montrer que $a_1 - d\alpha \in \mathbb{F}_p$, puis que $a_1^p - a_1 = db$.

d. Prouver que Q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si Q n'a pas de racine dans K.

e. Soit c un entier non multiple de p. Montrer que le polynôme $X^p - X - c$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.