Année universitaire 2012-2013 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Devoir surveillé

Vendredi 9 novembre 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits.

Tout anneau ci-dessous est commutatif. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note par $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.

Questions de cours

1. **[1pt]** Soient A un anneau, $a, b \in A$. Rappeler la définition du $\mathrm{pgcd}(a, b)$.
2. **[1pt]** Supposons que l'anneau A est factoriel. Montrer l'existence du $\mathrm{pgcd}(a, b)$ pour tout $a, b \in A$.
3. **[0.5pt]** Supposons que l'anneau A est factoriel. Rappeler la définition du *contenu* d'un polynôme $P(t) \in A[t]$, et la définition d'un *polynôme primitif*.
4. **[1.5pt]** Quel lien y a-t-il entre les contenus de $P(t)$, de $Q(t)$ et de $P(t)Q(t)$? Démontrer cette propriété.
5. **[1pt]** Déterminer le contenu du polynôme
$$P(t) = (t + 2)(2t + 3)(3t + 4)\cdots(2011t + 2012) \in \mathbb{Z}[t].$$

Exercice 1

1. **[1pt]** Démontrer que le polynôme $F(t, u) = (t + 2)^3 - (u + 3)^2$ est irréductible dans l'anneau $\mathbb{R}[t, u]$. (Indication : montrer d'abord que $t^3 - u^2$ est irréductible.)
2. **[1pt]** Soit S un ensemble infini de nombres réels et soit I l'ensemble des polynômes $P(t, u) \in \mathbb{R}[t, u]$ vérifiant
$$P(a^2 - 2, a^3 - 3) = 0 \quad \text{pour tout } a \in S.$$
Montrer que I est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[t, u]$. Vérifier que $F(t, u) \in I$.
3. **[3pt]** Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccl} f: & R[t,u] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & P(t,u) & \mapsto & P(x^2-2, x^3-3) \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux. Préciser la relation entre le noyau de ce morphisme, l'idéal I et l'idéal $\langle F(t, u)\rangle$.

Exercice 2

1. **[1pt]** Le polynôme $t^3 - t - 30$ est-il réductible dans $\mathbb{Q}[t]$? dans $\mathbb{Z}[t]$? Mêmes questions sur le polynôme $t^3 + t + 30$.
2. **[1pt]** Mêmes questions sur le polynôme $t^{2012} + 21t^{49} + 49t^{21} + 70$.
3. (a) **[1pt]** Déterminer tous les polynômes irréductibles de degré 2 dans l'anneau $\mathbb{F}_2[t]$, où $\mathbb{F}_2$ désigne le corps de 2 éléments.
   (b) **[1pt]** Le polynôme $t^5 + t^2 + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{F}_2[t]$?
   (c) **[1pt]** Le polynôme $2007t^5 + 2008t^4 + 2010t^3 + 2011t^2 + 2012t + 2013$ est-il réductible dans $\mathbb{Z}[t]$?

Exercice 3

1. **[1pt]** Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $t^4 - t$ dans $\mathbb{Z}[t]$.
2. **[2pt]** Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p$ le corps de p éléments. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[t]/\langle t^4 - t + p, t^2 + t + 1\rangle$ et $\mathbb{F}_p[t]/\langle t^2 + t + 1\rangle$ sont isomorphes.
3. **[2pt]** Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[t, u]/\langle t^4 - t + u, t^2 + t + 1\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.