Année universitaire 2014/15 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Devoir surveillé

Corrections

Tout anneau ci-dessous est commutatif et unitaire. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.

Questions de cours Soit A un anneau.

1. Rappeler la définition de l'idéal engendré par un ensemble $S \subset A$.

   L'idéal engendré par S (noté $\langle S\rangle$) est le plus petit idéal de A contenant S. De façon équivalente,
   $$\langle S\rangle = \{a_1u_1 + \cdots + a_mu_m : a_1, \ldots a_m \in A, u_1, \ldots, u_m \in S\}.$$

2. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

   (a) Toute suite croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ d'idéaux de A est stationnaire. (C'est-à-dire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$)

   (b) Tout idéal de A est engendré par un ensemble fini.

   On rappelle qu'un anneau admettant ces propriétés est appelé *noethérien*.

   (a)⇒(b) Supposons que A admette un idéal I non engendré par un ensemble fini. On construit la suite croissante d'idéaux $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ de la façon suivante. On choisit $u_0 \in I$ et on pose $I_0 = \langle u_0\rangle$. Puisque I n'est pas engendré par u_0, il existe $u_1 \in I \smallsetminus I_0$. On pose $I_1 = \langle u_0, u_1\rangle$. Puisque I n'est pas engendré par $\{u_0, u_1\}$, il existe $u_2 \in I \smallsetminus I_1$. On pose $I_2 = \langle u_0, u_1, u_2\rangle = \langle I_1, u_2\rangle$. Puisque I n'est pas engendré par $\{u_0, u_1, u_2\}$, il existe $u_3 \in I \smallsetminus I_2$. On pose $I_3 = \langle u_0, u_1, u_2, u_3\rangle = \langle I_2, u_3\rangle$, etc. On obtient une suite infinie strictement croissante $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$, ce qui contredit (a).

   (b)⇒(a) Soit $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ une suite croissante d'idéaux. Posons $I = \cup_{n=0}^{\infty} I_n$. Une vérification immédiate montre que I est un idéal de A. Par l'hypothèse (b) il est engendré par un ensemble fini : $I = \langle u_1, \ldots, u_s\rangle$. Tout u_k appartient à un certain I_{n_k} ; si on pose $n = \max\{n_1, \ldots, n_s\}$ alors $u_1, \ldots, u_s \in I_n$, ce qui implique que $I_n \supset I$. Or d'autre part $I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq I_{n+2} \subseteq \ldots \subseteq I$, ce qui montre que
   $$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots = I.$$

3. Un anneau principal est-il forcément noethérien ?

   Oui, parce que tout idéal d'un anneau principal est engendré par un seul élément.

4. Supposons que A soit noethérien.

   (a) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneau surjectif. L'anneau B, est-il forcément noethérien ? Si la réponse est "oui", le démontrer. Si la réponse est "non", donner un contre-exemple.

   Oui. Si I est un idéal de B alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A. Puisque A est noethérien, $f^{-1}(I)$ est engendré par un ensemble fini S. Alors I est engendré par l'ensemble fini $f(S)$.

   (b) Que peut-on dire de l'anneau des polynômes $A[t]$? Énoncer le théorème correspondant sans le démontrer.

   Le théorème d'Hilbert affirme que l'anneau de polynômes $A[t]$ est noethérien si A l'est.

5. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2014}] = \{a + b\sqrt{2014} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est-il noethérien ?

   Oui : l'anneau $\mathbb{Z}[t]$ est noethérien par le théorème d'Hilbert, et le morphisme $\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2014}]$ défini par $P(t) \mapsto P(\sqrt{2014})$ est surjectif.

Exercice 1

1. Démontrer que le polynôme $t^5 - u^2$ est irréductible dans l'anneau $\mathbb{R}[t, u]$.

   Le polynôme $G(t, u) = t^5 - u^2$ n'est pas divisible par un polynôme non-constant appartenant à $\mathbb{R}[t]$. Donc si G est réductible, alors $G = H_1H_2$ avec $\deg_u H_1 = \deg_u H_2 = 1$. Ceci signifie que G, considéré comme polynôme en u sur $\mathbb{R}(t)$, doit avoir une racine dans le corps $\mathbb{R}(t)$. Mais il n'en a pas.

2. En déduire que le polynôme $F(t, u) = (t - 2)^5 - (u + 5)^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[t, u]$.

   Si $F(t, u)$ est réductible, alors le polynôme $G(t, u) = F(t + 2, u - 5) = t^5 - u^2$ est également réductible, ce qui contredit la question précédente.

3. Soit S un ensemble infini de nombres réels et soit I l'ensemble des polynômes $P(t,u) \in \mathbb{R}[t,u]$ vérifiant
$$P(a^2+2, a^5-5) = 0 \quad \text{pour tout } a \in S.$$
Montrer que I est un idéal de l'anneau $\mathbb{R}[t,u]$. Vérifier que $F(t,u) \in I$.
Si $P_1(a^2+2,a^5-5) = P_2(a^2+2,a^5-5) = 0$ alors $(P_1+P_2)(a^2+2,a^5-5) = 0$, et si $P(a^2+2,a^5-5) = 0$ alors pour tout $Q \in \mathbb{R}[t,u]$ on a $(QP)(a^2+2,a^5-5) = 0$. Ceci démontre que I est un idéal.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $F(a^2+2,a^5-5) = a^{10} - a^{10} = 0$, ce qui montre que $F \in I$.

4. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} f: & R[t,u] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & P(t,u) & \mapsto & P(x^2+2, x^5-5) \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux. Préciser la relation entre le noyau de ce morphisme, l'idéal I et l'idéal $\langle F(t,u) \rangle$.
La vérification que f est un morphisme est immédiate.
Si $P \in \ker f$ alors $P(a^2+2,a^5-5) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui implique $P \in I$. Réciproquement, si $P \in I$ alors le polynôme $p(x) = P(x^2+2,x^5-5) \in \mathbb{R}[x]$ admet comme racine tout élément de l'ensemble infini S, ce qui n'est possible que si $p(x)$ est polynôme nul. Ceci signifie que $P \in \ker f$. On a montré que $\ker f = I$.
Notons $\tilde{I}$ l'idéal de l'anneau $\mathbb{R}(t)[u]$ engendré par I. C'est un idéal principal (parce que l'anneau est principal comme l'anneau de polynômes d'une seule variable sur un corps) propre contenant F. Puisque F est irréductible dans $\mathbb{R}(t)[u]$, on a $\tilde{I} = \langle F \rangle$, ce qui implique que pour tout $P \in I$ le polynôme F divise P dans $\mathbb{R}(t)[u]$. Puisque F est primitif comme polynôme en u sur $\mathbb{R}[t]$, il divise P dans $\mathbb{R}[t][u]$. Ceci montre que $I = \langle F \rangle$.

5. Notons J l'idéal $\langle F(t,u), t-1 \rangle$.
   (a) Montrer que $J = \langle t-1, (u+5)^2+1 \rangle$.
   Montrons tout d'abord que pour tout $P(t,u) \in \mathbb{R}[t,u]$ on a
   $$\langle P(t,u), t-1 \rangle = \langle P(1,u), t-1 \rangle \tag{1}$$
   Le polynôme $P(t,u) - P(1,u)$ considéré comme polynôme en t à coefficients dans $\mathbb{R}[u]$ admet $t=1$ comme racine. Ceci implique qu'il est divisible par $t-1$ dans l'anneau $\mathbb{R}(u)[t]$. Puisque $t-1$ est primitif (en tant que polynôme en t sur $\mathbb{R}[u]$), il divise $P(t,u) - P(1,u)$ dans $\mathbb{R}[t,u]$, autrement dit
   $$P(t,u) - P(1,u) \in \langle t-1 \rangle. \tag{2}$$
   Ceci démontre (1).
   Il nous reste à remarquer que $F(1,u) = (u+5)^2+1$.
   (b) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[t,u]/J$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.
   Considérons l'application
   $$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}[t,u] &\to \mathbb{C}, \\ P(t,u) &\mapsto P(1,-5+i). \end{aligned}$$
   Une vérification immédiate montre que ψ est morphisme d'anneau surjectif et que $J \subset \ker\psi$.
   Montrons que $\ker\psi \subset J$. Comme on a vu dans la question précédente, tout polynôme $P(t,u) \in \mathbb{R}[t,u]$ vérifie (2). Il nous reste à montrer que tout $P(t,u) \in \ker\psi$ vérifie
   $$P(1,u) \in \langle (u+5)^2+1 \rangle. \tag{3}$$
   Puisque $P(t,u) \in \ker\psi$, le polynôme $p(u) = P(1,u) \in \mathbb{R}[u]$ admet la racine $-5+i$. Puisque $p(u) \in \mathbb{R}[u]$, il admet également la racine $-5-i$, et donc divisible par $(u-(-5+i))(u-(-5-i)$, ce qui est égal à $(u+5)^2+1$.
   On obtient donc l'égalité d'idéaux $J = \ker\psi$. Puisque ψ est surjectif, ceci montre que $\mathbb{R}[t,u]/J \cong \mathbb{C}$.

Exercice 2

1. Le polynôme $t^3 - t^2 - 100$ est-il réductible dans $\mathbb{Q}[t]$? dans $\mathbb{Z}[t]$? Mêmes questions sur le polynôme $t^3 + t^2 + 100$.
Remarquons tout d'abord que pour un polynôme primitif l'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[t]$ est équivalente à celle dans $\mathbb{Z}[t]$. Dans la suite on ne discute que la dernière.
Si le polynôme primitif $at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathbb{Z}[t]$ de degré 3 est réductible dans $\mathbb{Z}[t]$ alors il admet un facteur $\alpha t + \beta \in \mathbb{Z}[t]$ de degré 1. Il est clair que $\alpha \mid a$ et $\beta \mid d$. En particulier, si $a = 1$ alors f admet une racine entière qui divise d.
En vérifiant tous les diviseurs de 100, on trouve que $t^3 - t^2 - 100$ admet la racine 5, donc estréductible, et $t^3 + t^2 + 100$ admet la racine -5, donc est également réductible.

2. Mêmes questions sur le polynôme $t^{2014} + 22t^{44} + 44t^{33} + 66$.

   Ce polynôme est irréductible d'après le critère d'Eisenstein avec $p = 11$.

3. (a) Déterminer tous les polynômes irréductibles de degré 2 dans l'anneau $\mathbb{F}_2[t]$, où $\mathbb{F}_2$ désigne le corps de 2 éléments.

   Si $t^2 + bt + c \in \mathbb{F}_2[t]$ est irréductible alors $c = 1$. Il n'y a que 2 polynômes avec cette propriété : $t^2 + 1 = (t+1)^2$, qui est réductible, et $t^2 + t + 1$, qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{F}_2$, donc est irréductible.

   (b) Le polynôme $t^5 + t^3 + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{F}_2[t]$?

   Si ce polynôme est réductible alors il doit admettre soit une racine dans $\mathbb{F}_2$, soit un facteur irréductible de degré 2, qui est forcement $t^2 + t + 1$. On voit immédiatement qu'il n'y a pas de racine, et la division euclidienne montre que $t^2 + t + 1$ ne divise pas $t^5 + t^3 + 1$:

   $$t^5 + t^3 + 1 = (t^3 + t^2 + t)(t^2 + t + 1) + t + 1.$$

   Donc ce dernier est irréductible.

   (c) Le polynôme

   $$2015t^5 + 2014t^4 + 2013t^3 + 2012t^2 + 2011 \tag{4}$$

   est-il réductible dans $\mathbb{Z}[t]$?

   L'image de ce polynôme par le morphisme $\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{F}_2[t]$ (réduction modulo 2) est $t^5 + t^3 + 1$, qui est irréductible dans $\mathbb{F}_2[t]$. Ceci implique que le polynôme (4) est irréductible dans $\mathbb{Z}[t]$.