Année universitaire 2012-2013 Licence 3 de mathématiques

Algèbre 4 - Examen

Lundi 17 novembre 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les documents sont interdits. Le barème est proposé à titre indicatif.

Tout anneau ci-dessous est commutatif. Si a et b sont des éléments d'un anneau A, on note par $\langle a, b\rangle$ l'idéal engendré par a et b.

Questions de cours [5 pts] Soit A un anneau.

1. **[1 pt]** Rappeler la définition de l'idéal engendré par un ensemble $S \subset A$.
2. **[2 pts]** Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) Toute suite croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ d'idéaux de A est stationnaire. (C'est-à-dire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$)
   (b) Tout idéal de A est engendré par un ensemble fini.

   On rappelle qu'un anneau intègre admettant ces propriétés est appelé *noethérien*.
3. **[0,5 pt]** Un anneau principal intègre est-il forcement noethérien ?
4. **[0,5 pt]** Supposons que A est noethérien. Qu'est-ce qu'on peut dire de l'anneau de polynômes $A[t]$? Énoncer le théorème correspondant sans le démontrer.
5. **[1 pt]** Utiliser ce théorème pour montrer que les anneau de polynômes $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ et $K[t_1, \dots, t_n]$ (où K est un corps) sont noethériens.

Exercice 1 [7 pts]

1. **[1 pt]** Soient n un nombre naturel, et p un nombre premier. Montrer que le polynôme $f(t) = t^n - p$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. **[1 pt]** Rappeler la définition d'un corps de rupture d'un polynôme irréductible sur un corps.
3. **[1 pt]** Donner un corps de rupture du polynôme $f(t)$ sur $\mathbb{Q}$. Quel-est son degré sur $\mathbb{Q}$?
4. **[1 pt]** En déduire qu'il existe une extension de $\mathbb{Q}$ de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
5. **[1 pt]** Rappeler la définition du corps de décomposition d'un polynôme sur un corps.
6. **[2 pts]** Déterminer le corps de décomposition du polynôme $f(t) = t^4 - 3$. Quel-est son degré sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2 [6 pts] Dans cet exercice on étudie les anneaux finis.

1. **[1 pt]** Soient A un anneau intègre et a un élément non-nul de A. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} A &\to A \\ x &\mapsto ax \end{aligned} \tag{1}$$
   est injective.
2. **[1 pt]** On suppose en plus que l'anneau A est fini. Montrer que l'application (1) est bijective.
3. **[1 pt]** En déduire que tout anneau fini intègre est un corps.
4. **[1 pt]** Soit p un nombre premier. Est-il vrai que tout anneau de p éléments est un corps ?
5. **[0,5 pt]** Est-il vrai que tout anneau de p^2 éléments est un corps ?
6. **[1,5 pt]** Démontrer que les trois anneaux $\mathbb{F}_{p^2}$, $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes deux à deux. (Indication : pour montrer que $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \ncong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, étudier les nilpotents dans chacun des anneaux.)

Exercice 3 [8 pts]

1. **[3 pts]** Soit p un nombre premier. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) **[0.5 pt]** Tout polynôme $P(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ de degré 2 admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$.
   (b) **[0.5 pt]** Tout polynôme $P(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ de degré 3 admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^3}$.
   (c) **[1 pt]** Tout polynôme $P(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ de degré 4 admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^4}$.
   (d) **[1 pt]** Tout polynôme $P(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ de degré 5 admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^5}$.

   Justifier vos réponses.
2. **[0,5 pt]** Quelle-est la structure du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_9^\times$?
3. **[1 pt]** Montrer que pour $\theta \in \mathbb{F}_9^\times$ on a $\theta^4 \in \{1, -1\}$. Montrer que $\theta^4 = -1$ si et seulement si θ engendre le groupe $\mathbb{F}_9^\times$.
4. **[0,5 pt]** Considérons le polynôme $P(t) = t^2 + t - 1 \in \mathbb{F}_3[t]$. Est-il irréductible sur $\mathbb{F}_3$?
5. **[1.5 pt]** Montrer que $P(t)$ admet une racine dans $\mathbb{F}_9$. Soit θ une telle racine. Déterminer θ^4.
6. **[0.5 pt]** Est-il vrai que θ engendre le groupe $\mathbb{F}_9^\times$?
7. **[1 pt]** Donner un exemple d'un polynôme $Q(t) \in \mathbb{F}_3[t]$ de degré 2, irréductible sur $\mathbb{F}_3$ et admettant la propriété suivante : aucune racine de $Q(t)$ n'engendre $\mathbb{F}_9^\times$.

Exercice 4 [6 pts]

1. **[1 pt]** Rappeler les définitions d'un polynôme symétrique en n variables, des polynômes symétriques élémentaires en n variables, et l'énoncé du théorème des polynômes symétriques.
2. **[1 pt]** Parmi les polynômes suivants en variables $x_1, \ldots, x_n$, lesquels sont symétriques ?

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2) &= x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_1^2 && (n = 2); \\ P_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 && (n = 3); \\ P_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1 x_2 x_3 && (n = 3). \end{aligned}$$

3. **[1 pt]** Exprimer le polynôme $P_3(x_1, x_2, x_3)$ en forme $Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, où Q est un polynôme et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les polynômes symétriques élémentaires en 3 variables.
4. **[1 pt]** Soit a un nombre complexe. Déterminer le discriminant du polynôme

$$f(t) = t^3 - 3at^2 + 4 \in \mathbb{C}[t]$$

   en fonction du paramètre a.
5. **[1 pt]** Déterminer l'ensemble S des valeurs de a pour lesquelles le polynôme $f(t)$ admet 3 racines complexes distinctes.
6. **[1 pt]** Soient $a \in S$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines complexes de $f(t)$. Déterminer $P_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.