Préparation Agrégation
2013 - 2014

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Ecrire les événements suivants à l'aide d'opérations ensemblistes :

E_1="au moins un des A_n est réalisé" ; E_2="tous les A_n sont réalisés" ;

E_3 = "à partir de $n = 500$ aucun A_n n'est réalisé" ;

E_4 = "un nombre fini de A_n est réalisé" ;

E_5="une infinité de A_n sont réalisés" ; E_6="tous les A_n sauf un nombre fini sont réalisés".

Exercice 2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1) Démontrer la formules de Poincaré :

$$P\Big(\bigcup_{1\le j\le n} A_j\Big) = \sum_{1\le j\le n} (-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\Big)$$

2) Démontrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \liminf\,(A_n^c) &= (\limsup A_n)^c, \\ \limsup\,(A_n\cup B_n) &= \limsup A_n \cup \limsup B_n. \end{aligned}$$

3) Démontrer les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \le \liminf \mathbb{P}(A_n) \le \limsup \mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

4) On suppose que les événements $(A_n)_{n\ge 0}$ sont presque certains, c'est-à-dire $P(A_n) = 1$. Démontrer que $\cap_{n\ge 1} A_n$ est presque certain.

Exercice 3. Dans un espace probabilisé on suppose qu'on dispose d'une suite $(A_n)_{n\ge 1}$ d'événements indépendants. Démontrer : $1 - P(\cup_{j=1}^n A_j) \le \exp\big(-\sum_{j=1}^n P(A_j)\big)$.

Exercice 4. N personnes déposent leur parapluie à l'entrée d'un restaurant. En partant, chacune récupère un parapluie au hasard : la première choisit le sien de manière uniforme parmi les N parapluies, la deuxième en prend un de façon uniforme parmi les $N-1$ restants, etc.

(1) Montrer qu'on peut prendre comme espace de probabilités Ω correspondant à cette situation l'ensemble S_n des permutations de n éléments, muni de la loi uniforme.

(2) Quelle est la probabilité que la première personne récupère son parapluie ? Quelle est la probabilité que la ième personne récupère son parapluie ? Ces événements sont-ils indépendants ?

(3) Quelle est l'espérance du nombre de personnes qui récupère leur propre parapluie ?

(4) Déterminer la probabilité p_N qu'au moins une personne récupère son parapluie. Que devient p_N lorsque N tend vers l'infini ?

Exercice 5. Les gènes se présentent le plus souvent en paire et sous deux formes d'allèles que nous noterons A et B. Cela donne donc trois génotypes possibles : AA, AB et BB. Chaque individu reçoit au hasard un gène de chacun de ses parents. Chaque allèle composant le gène d'un des parents ayant la probabilité $1/2$ d'être transmis à l'enfant. On suppose que les génotypes des deux parents sont indépendants et de même loi : soit x la probabilité d'avoir le génotype AA, $2y$ celle d'avoir le génotype AB, z celle d'avoir le génotype BB (remarque évidente : $x+2y+z = 1$).

1. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant.

2. Vérifier que, si $x = y = z = 1/4$, alors les génotypes de l'enfant ont les mêmes probabilités que ceux des parents.

3. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant de la seconde génération. Que constatez-vous ? La loi de répartition des génotypes s'appelle la loi de Hardy-Weinberg.

Exercice 6. Une classe est constituée de 20 élèves tous nés la même année. Si on considère que leur date d'anniversaires sont indépendantes, et distribuées de façon uniforme sur $[[1, 365]]$, quelle est la probabilité qu'il y ait deux “jumeaux” dans la classe ? A partir de combien d'élèves dans la classe cette probabilité est-elle au moins 0.5 ?

Exercice 7. Modèles d'urnes
Une urne contient N boules de K couleurs différentes : N_1 boules de la couleur 1, N_2 boules de la couleurs 2,... N_K boules de la couleur K avec $N_1+N_2+\cdots+N_K = N$. On pose $p_i = N_i/N$ la proportion initiale de la couleur i. On tire au hasard $n \leq N$ boules dans l'urne et on s'intéresse à la répartition des couleurs dans l'échantillon obtenu. On note $\mathbb{P}_{n_1,\ldots,n_K}$ la probabilité d'obtenir n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,...,n_K boules de la couleur K. Déterminer cette probabilité lorsqu'on fait

1) un tirage sans remise ;
2) un tirage avec remise ;

Exercice 8. On se place dans le cadre de l'exercice précédent avec $K = 2$.

1) Donner les caractéristiques des lois obtenues dans les différents cas.
2) On fait tendre les nombres de boules N et N_1 vers l'infini, tel que N_1/N tende vers $p < 1$. Déterminer la limite de la loi hypergéométrique.

Exercice 9. On considère une urne qui contient n_1 boules rouges et n_2 boules blanches. On considère M un entier strictement positif. Soit X la variables aléatoire égale au nombres de tirages nécessaire pour obtenir M boules rouges lorsqu'on effectue des tirages avec remise. Caractériser cette loi.

Exercice 10. On considère un processus de Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p $(q = 1-p)$. On note L le plus grand entier tel que $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ et M le plus grand entier tel que $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$.

a) Déterminer les lois de L et M. Pour quelles valeurs de p les deux lois coïncident-elles ?
b) Montrer que $E(L) \geq E(M) = 2$.
c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\lim_{l\to+\infty} P(M = n|L = l) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{si } p < 1/2 \\ q^{n-1}p, & \text{si } p > 1/2 \\ 1/2^n & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

Exercice 11. On considère $\Omega = [0, 2\pi]$ muni de la probabilité uniforme. On s'intéresse aux deux variables aléatoires X et Y obtenues en prenant l'abscisse, respectivement l'ordonnée, du point du cercle trigonométrique d'angle $\omega \in \Omega$.

(1) Donner la loi de X et celle de Y.
(2) X et Y sont-elles indépendantes ? Les événements “$X \geq 0$ “ et “$Y \leq 0$” sont-ils indépendants ?
(3) On considère maintenant un point aléatoire (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité. Quelle est la loi de X ? On note R et Θ ses coordonnées pôlaires ($\Theta \in [0, 2\pi[$). Quelle est la loi de R ? Quelle est la loi de Θ ? R et Θ sont-elles indépendantes ?