Préparation Agrégation
2013 - 2014

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Estimateurs de la moyenne et de la variance (A SAVOIR si possible, ou RETROUVER TRES RAPIDEMENT)

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même espérance m de même variance $\sigma^2 > 0$.

1) On pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$. (Rép : m et $\frac{\sigma^2}{n}$)

2) On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2$. Calculer l'espérance de Y_n. (Rép : $n\sigma^2$)

3) On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2$. Calculer l'espérance de Z_n. (Rép : $(n-1)\sigma^2$)

Exercice 2.

Déterminer la fonction caractéristique d'une loi exponentielle de paramètre λ, et d'une loi de Poisson de paramètre μ.

Exercice 3. On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur de champignons en un jour. On suppose que N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, de fonction génératrice G. On suppose que la probabilité qu'un champignon cueilli soit comestible est p, que le fait qu'un champignon cueilli soit comestible est indépendant du fait que les autres le soient, ainsi que du nombre de champignons ramassés. Montrer que la probabilité que tous les champignons cueillis soient comestibles est $G(p)$.

Exercice 4. 3 personnes A, B et C arrivent simultanément à la poste où 2 guichets sont ouverts. A et B se rendent chacun à un guichet, C attend et ira au premier guichet libéré. On suppose que le temps que passe chaque personne au guichet suit une loi exponentielle de paramètre 1, et qu'ils sont indépendants.
Quelle est la probabilité que C sorte le dernier ?
Quelle est l'espérance du temps passé à la poste par C ?

Exercice 5. Convolution
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer la densité de $X + Y$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité. Calculer $P(X = Y)$. Calculer $P(X < Y)$ si elles sont de même loi.

Exercice 7. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n v.a. indépendantes, de même loi de densité f. Donner la loi du couple $(\min(X_i), \max(X_i))$.
Donner la loi de l'étendue $\max(X_i) - \min(X_i)$ dans le cas de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$.

Exercice 8. Lois gamma, χ^2, Student

Pour $a > 0$ on pose

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

On appelle loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $G(a, \lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $\gamma_{a,\lambda}$ où

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Rappels : $\Gamma(a)$ est défini pour $a > 0$; $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

1) Soit X une variable aléatoire de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2) Soit X et Y deux variables indépendantes de loi $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi $G(a + b, \lambda)$, et montrer

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$

3) Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$; donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

4) Soit Y une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$. Montrer que Y^2 suit la loi gamma $G(1/2, 1/2)$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

5) Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont n variables aléatoires de loi $N(0, 1)$. Exprimer en terme de loi Γ la loi de $Z = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ et retrouver $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

6) Soit Y une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$ et Z une variable aléatoire indépendante de Y de loi du χ^2 à n degrés de liberté. Déterminer la densité de $\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{Z}}$ (Loi de Student à n degrés de liberté)