CHAÎNES DE MARKOV

Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1

Année 2013 - 2014

Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol

Table des Matières

CHAPITRE I

Chaînes de Markov

Ce chapitre est fortement inspiré des livres de Bercu (modélisation stochastique et simulation), Toulouse (Thèmes de probabilités et statistique) et Foata-Fuchs (Processus stochastiques)

Les chaînes de Markov constituent un des exemples les plus simples de suites de variables aléatoires (X_n). Les variables (X_n) sont à valeurs dans un ensemble E appelé *espace d'état.* Certaines chaînes de Markov sont à espace d'états continu, mais nous n'aborderons pas leur étude ici : nous nous intéresserons uniquement aux chaînes à espace d'états fini ou dénombrable. Dans toute la suite E sera donc un ensemble fini ou dénombrable ($\mathbb{N}$ ou un sous-ensemble), que l'on munira de la tribu de toutes ses parties.

1. Définition

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E. La loi de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une loi sur $E^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu engendrée par les cylindres. En vertu d'un théorème de Carathéodory, la loi de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est caractérisée par ses lois marginales de dimension finie, c'est-à-dire par la loi des vecteurs aléatoires $(X_0, \dots, X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, E est au plus dénombrable, et donc la loi de $(X_0, \dots, X_n)$ est caractérisée à son tour par la donnée de $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$ pour tout $(x_0, \dots, x_n)$ dans E.

Définition 1. *Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E est une* **chaîne de Markov** *d'espace d'états E si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(x_0, \dots, x_{k+1})$ dans E tels que $\mathbb{P}(X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) > 0$,*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1}|X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1}|X_k = x_k).$$

Cela s'écrit également

$$\mathcal{L}(X_{k+1}|X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) = \mathcal{L}(X_{k+1}|X_k = x_k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La chaîne est dite **homogène** *si on a de plus pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout x et y dans E,*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = y|X_k = x) = \mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x).$$

Remarque : En toute rigueur il faudrait faire attention quand les événements par lesquels on conditionne peuvent être de probabilités nulles. De fait dans les problèmes de modélisation, les chaînes de Markov sont données par la loi de X_0 et par toutes les probabilités de transition et les problèmes ne se posent pas.

L'indice n de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est interprété comme un temps. La variable X_k représente l'état à l'instant k, la tribu $\sigma(X_0, \dots, X_{k-1})$ représente son passé tandis que la tribu $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$ représente son futur. Les chaînes de Markov sont des suites aléatoires avec très peu de mémoire, en quelque sorte. Dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à un instant futur connaissant tout le passé et le présent, ne dépend que de l'état à l'instant présent, mais non des états antérieurs.
On dit souvent que conditionnellement au présent, passé et futur sont indépendants.

Dans toute la suite, les chaînes Markov considérées seront toutes homogènes et à espace d'états au plus dénombrable.

Définition 2. *On appelle* probabilité de transition *pour aller de l'état x à l'état y la probabilité*

$$p_{x,y} = \mathbb{P}(X_{k+1} = y | X_k = x) \quad (= \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)) .$$

Lemme 3. *On note ν_0 la loi de X_0 ($\nu_0(x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)$). On a alors pour tous $(x_0, \dots, x_n)$ dans E*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \nu_0(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}} .$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$, et, si $\mathbb{P}((X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \neq 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)\mathbb{P}((X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$
(si $\mathbb{P}((X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \neq 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = 0$ également)
On peut aussi faire la preuve par conditionnements successifs :
$\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1, X_0 = x_0) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \nu(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}}$. □

Définition 4. *On appelle* **matrice de transition** *la matrice $\mathcal{P} = (p_{x,y})_{x,y \in E}$:*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{x_0,x_0} & p_{x_0,x_1} & p_{x_0,x_2} & \cdots \\ p_{x_1,x_0} & p_{x_1,x_1} & p_{x_1,x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} .$$

D'après le lemme précédent, la loi d'une chaîne de Markov est caractérisée par la loi ν_0 de X_0 et par sa matrice de transition.

C'est une matrice finie ou dénombrable, suivant que l'ensemble des états est fini ou dénombrable.

Proposition 5. *Toute matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :*
(1) *pour tout couple (x, y) de E, $0 \leq p_{x,y} \leq 1$;*
(2) *pour tout $x \in E$, on a $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$.*

DÉMONSTRATION. Les nombres $p_{x,y}$ sont des probabilités, donc le premier point est évident. Le second point découle du fait qu'on somme les probabilités sur toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire. □

Une matrice qui vérifie les deux points ci-dessus est appelée *matrice stochastique.*

Proposition 6. *Soit $\mathcal{P}$ une matrice stochastique. Alors*
(1) *$\mathcal{P}$ admet 1 comme valeur propre ;*
(2) *le vecteur V ayant toutes ses composantes égales à 1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de multiplier la matrice $\mathcal{P}$ par le vecteur V. □

Lemme 7. *On identifiera une probabilité μ sur E et le vecteur ligne dont la ième coordonnée est $\mu(x_i)$.*
Soit X_n est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathcal{P}$, et soit ν_0 la loi de X_0. Alors la loi de X_1 est $\nu_1 = \nu_0\mathcal{P}$, et pour tout entier n, la loi de X_n est $\nu_n = \nu_0\mathcal{P}^n$.
En particulier, $\mathbb{P}(X_n = x_j|X_0 = x_i) = (\mathcal{P}^n)_{i,j}$.

Démonstration. Pour le premier point, on a pour tout x_i de E,
$\mathbb{P}(X_1 = x_i) = \sum_{x_j\in E}\mathbb{P}(X_1 = x_i|X_0 = x_j)\mathbb{P}(X_0 = x_j) = \sum_{x_j\in E}\nu_0(x_j)\mathcal{P}_{j,i} = (\nu_0\mathcal{P})_i$ (en posant par convention $P(A|B)P(B) = 0$ si $P(B) = 0$).
Ensuite on peut procéder par récurrence. On note (Q_n) la proposition $\nu_n = \nu_0\mathcal{P}^n$. On vient de prouver Q_1. Il reste à vérifier l'hérédité. Soit $n > 0$. On suppose $\nu_n = \nu_0\mathcal{P}^n$. Alors pour tout x_i de E,
$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_i) = \sum_{x_j\in E}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_i|X_n = x_j)\mathbb{P}(X_n = x_j) = \sum_{x_j\in E}\nu_n(j)\mathcal{P}_{j,i} = (\nu_0\mathcal{P}^{n+1})_i$.
Pour faire partir la chaîne de x_i, on prend $\nu_0 = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ et on obtient $\mathbb{P}(X_n = x_j|X_0 = x_i) = (\nu_0\mathcal{P}^n)_j = (\mathcal{P}^n)_{i,j}$. □

Ainsi l'évolution de la loi de X_n se ramène en fait à de l'algèbre linéaire.
En particulier, si $\nu\mathcal{P} = \nu$, si X_n a pour loi ν, X_{n+1} également : on dit que la la loi ν est invariante.
On verra plus tard que **lorsque l'espace d'états E est fini**, on peut toujours trouver une telle probabilité invariante.

A toute matrice de transition, on peut associer un graphe dirigé, éventuellement infini. Les sommets du graphe sont les différents états de la chaîne. Il y a une flèche, étiquetée $p_{x,y}$, entre le sommet x et le sommet y si et seulement la probabilité de transition est strictement positive : $p_{x,y} > 0$. La chaîne peut alors s'interpréter comme une marche aléatoire sur le graphe.
On verra plus tard que les composantes fortement connexes du graphe joueront un grand rôle, notamment les composantes fermées.

2. Exemples

Il y a des modèles très classiques de chaînes de Markov homogènes, avec lesquels il est bon de se familiariser dès le début, en voici quelques-uns.

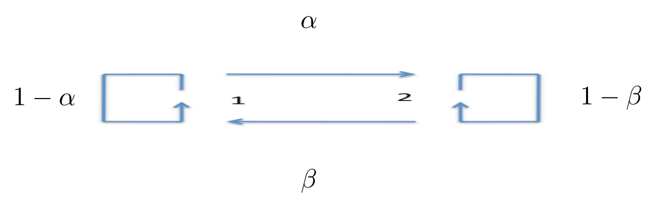
La chaîne à deux états.

Si on exclut le cas trivial, la matrice de transition correspondante est de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Elle permet de faire des calculs explicites : pour tout $n \geq 0$, on peut évaluer la $n^{\text{ième}}$ puissance $\mathcal{P}^n$, ainsi que la limite $\lim_n \mathcal{P}^n$ (exercice), et donc déterminer explicitement la loi de X_n.

Le graphe associé est très simple. Il a une seule composante fortement connexe la chaîne est dite **irréductible**.

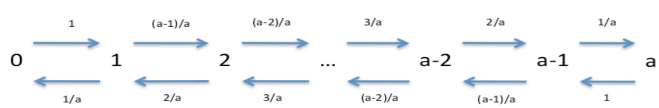


Le modèle de diffusion d'Ehrenfest

Deux urnes A et B contiennent, à elles deux, a boules, numérotées de 1 à a. A chaque instant, on choisit une boule de façon uniforme, et on la change d'urne. On s'intéresse au nombre de boules X_n contenues dans l'urne A à l'instant n : l'ensemble des états est donc l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots, a\}$. Dans ces conditions, si à un instant l'urne A est vide (la chaîne est dans l'état 0), à l'instant suivant l'urne contiendra 1 boule avec probabilité 1.
Si à un instant A contient i boules, $0 < i < a$, à l'instant suivant elle contiendra $i-1$ ou $i+1$ boules, avec probabilité respectivement $\frac{i}{a}$ et $\frac{a-i}{a}$. La matrice de transition est donc donnée par

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & (a-1)/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a & 0 & (a-2)/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (a-1)/a & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le graphe par



Là encore il n'y a qu'une composante fortement connexe : la chaîne est **irréductible**

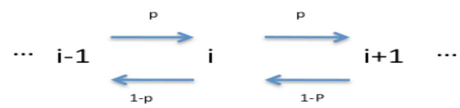
Si $X_0 = a$, le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est une description simplifiée de la diffusion d'un gaz d'un récipient A vers un récipient B initialement vide (chaque boule représente une molécule).

Promenade au hasard (ou marche aléatoire) sur $\mathbb{Z}$

On considère une chaîne de Markov homogène, d'espace d'états $E = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ et de matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{x,y})$ $(x, y \in \mathbb{Z})$, avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$p_{x,y} = \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1 \\ 1-p, & \text{si } j = i-1 \\ 0, & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

où p est un nombre fixé tel que $0 < p < 1$. Un tel processus est appelé promenade aléatoire (ou marche aléatoire) sur $\mathbb{Z}$. Son graphe peut être décrit comme suit :



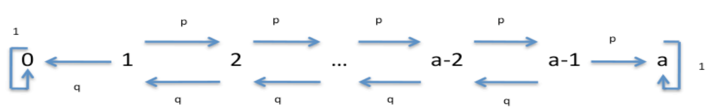
Là encore, le graphe a une seule composante fortement connexe : la chaîne est irréductible.

Le modèle de la ruine du joueur

Un joueur A joue contre un joueur B une suite de parties de pile ou face (avec une pièce éventuellement pipée), indépendantes. Au départ, A possède n_a euros, et B n_b : la somme totale de leurs fortunes est de $n_a + n_b$ euros. A chaque partie on convient que le joueur A gagne 1 euro si le résultat est pile, sinon il perd un euro, et vice-versa pour B. La probabilité d'obtenir *pile* est p avec $0 < p < 1$. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné. Pour chaque $n \geq 1$, on désigne par X_n la fortune du joueur A à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ partie. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{0, 1, \ldots, n_a + n_b\}$.
Sa matrice de transition est donnée par

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p\ldots 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, en notant $a = n$



Les états 0 (ruine de A) et $n_a + n_b$ (ruine de B) sont dits absorbants : quand on est dessus, on n'en sort plus.
Cette fois, le graphe a 3 composantes fortement connexes, dont deux seulement sont fermées. La chaîne n'est pas irréductible.

3. La relation de Chapman-Kolmogorov

On appelle ainsi la propriété qui relie, pour une chaîne de Markov homogène, les probabilités de transition en n étapes aux probabilités en une seule étape.

On note $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène, dont l'ensemble des états est E et la matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$. Pour $n \geq 0$ et $i, j \in E$ on désigne par $p_{i,j}^{(n)}$ la probabilité, partant de l'état i à l'instant 0, d'être dans l'état j à l'instant n ; en d'autres termes on a :

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$$

Comme on l'a vu dans le lemme 7, $p_{i,j}^{(n)} = (\mathcal{P}^n)_{i,j}$.
On peut facilement vérifier :

Proposition 8. *Pour tout $n \geq 0$ la matrice $\mathcal{P}^n$ est stochastique.*

Démonstration. En effet, pour tout $i \in E$, on a :

$$\sum_{j\in E} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{j\in E} \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) = 1.$$

□

Ainsi, pour tout $k \geq 1$ fixé, la suite $(X_{kn})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, ayant même ensemble d'états E et dont la matrice de transition est $\mathcal{P}^k$.

La relation de Chapman-Kolmogorov qui suit peut s'interpréter en disant que "pour passer de i à j en $m+n$ étapes il a bien fallu en m étapes aller de i à un certain k puis en n étapes aller de k à j".

Proposition 9. Relation de Chapman-Kolmogorov
Pour tout $(i,j) \in E^2$ et tout couple (m,n) d'entiers positifs, on a l'identité :

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_0 = i) = \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_m = k|X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = k)$$

ou encore

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k\in E} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}.$$

Démonstration. Cette identité résulte immédiatement de l'associativité du produit matriciel :

$$\mathcal{P}^{m+n} = \mathcal{P}^m\mathcal{P}^n$$

□

Les propositions suivantes sont des raccourcis de calcul souvent utiles :

Proposition 10. *Soient $n \geq 0$, $r \geq 1$ deux entiers. Alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+r}=j_{n+r},\ldots X_{n+1}=j_{n+1}|X_n=i_n\ldots X_0=i_0) &= \mathbb{P}(X_{n+r}=j_{n+r},\ldots X_{n+1}=j_{n+1}|X_n=i_n)\\ &= p_{i_n,j_{n+1}}p_{j_{n+1},j_{n+2}}\ldots p_{j_{n+r-1},j_{n+r}}\end{aligned}$$

Démonstration. C'est immédiat à partir par exemple du lemme 3.

□

Il est assez intuitif qu'il n'est pas nécessaire de conditionner par tout le passé. On peut par exemple, en revenant aux définitions des espérances conditionnelles, en écrivant $(X_2 = i) \cap (X_0 = j) = \cup_k((X_2 = i) \cap (X_1 = j) \cap (X_0 = j)$ et en utilisant le lemme 3, démontrer $\mathbb{P}(X_3 = l|X_2 = i, X_0 = j) = \mathbb{P}(X_3 = l|X_2 = i)$. On peut généraliser : Notons A_- un événement appartenant à la tribu du passé $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(X_0,\ldots,X_{n-1})$. Il s'écrit donc comme une réunion dénombrable d'événements disjoints deux à deux de la forme $\{X_0 = i_0,\ldots,X_{n-1} = i_{n-1}\}$. Soit A_+ un événement appartenant à la tribu du futur $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2},\ldots)$. On obtient alors en corollaire du résultat précédent :

Théorème 11.

> *Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, si $\mathbb{P}(A$ et $X_n = i) > 0$, alors :*
>
> $$\mathbb{P}(A_+|A_- \text{ et } X_n = i) = \mathbb{P}(A_+|X_n = i)$$

Par exemple, $\mathbb{P}(X_5 = i|X_3 = j$ et $X_1 = k) = \mathbb{P}(X_5 = i|X_3 = j) = \mathcal{P}_{j,i}^2$.

Par la propriété d'homogénéité, on peut ensuite se ramener à un conditionnement par X_0 ; une manière de dire cela proprement est que conditionnellement à $X_n = x$, la suite $(X_{n+m}, m \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de même matrice de transition que (X_n), de loi initiale δ_x (et indépendante de $(X_0, \ldots, X_{n-1})$).

Notation : on notera, si A est un événement et Z une variable aléatoire, $\mathbb{P}^x(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = x)$ et $\mathbb{E}^x[Z] = \mathbb{E}[Z|X_0 = x]$: cela consiste à travailler non pas avec (X_n) mais avec la chaîne de même matrice de transition que (X_n) et de loi initiale δ_x. On l'appelle aussi “chaîne issue de x”.

On va voir que la relation précédente, démontrée pour n déterministe, est en fait vraie pour tout temps d'arrêt T adapté à la filtration naturelle des (X_n) : conditionnellement à $\{T < \infty \text{ et } X_T = i\}$, le processus $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ est une chaî ne de <arkov de même matrice de transition que (X_n) et partant de i.

Plus formellement : soit T un temps d'arrêt adapté à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ (relativement à la filtration naturelle). Rappelons qu'un événement $A \in \mathcal{F}_\infty$ (tribu engendrée par la réunion de $\mathcal{F}_n$) appartient à la tribu $\mathcal{F}_T$, s'il a la propriété suivante

$$\forall n \geq 0, \quad A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Théorème 12.

Propriété de Markov forte
Soit T un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$ adapté à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, d'ensemble d'états E et de matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$. Soient i un élément de E et A un élément de la tribu $\mathcal{F}_T$ tel que $\mathbb{P}(T < +\infty \text{ et } A \text{ et } X_T = i) > 0$. Alors on a l'identité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+r} = j_r | T < +\infty, A, X_T = i) &= \mathbb{P}(X_1 = j_1, \ldots, X_r = j_r | X_0 = i) \\ &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r}. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $A' = \{T < +\infty, A, X_T = i\}$, $B = \{X_{T+1} = j_1, \ldots, X_{T+r} = j_r\}$, et $B_n = \{X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+r} = j_r\}$ pour $n \geq 0$. Il s'agit de prouver :

$$\mathbb{P}(B|A') = p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r}.$$

ou encore que $\mathbb{P}(A' \cap B) = p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r} \mathbb{P}(A')$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A' \cap B) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T = n, A, X_T = i, B) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T = n, A, X_n = i, B_n) \\ &= \sum_{n\geq 0}{}' \mathbb{P}(B_n | T = n, A, X_n = i) \mathbb{P}(T = n, A, X_n = i). \end{aligned}$$

où dans la dernière somme on n'a gardé $(\sum')$ que les termes tels que $\mathbb{P}(T = n, A, X_n = i) > 0$. Pour ces termes, puisque $\{T = n, A\} \in \mathcal{F}_n$ on peut appliquer la propriété de Markov (déterministe) vu précédemment. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n | T = n, A, X_n = i) &= \mathbb{P}(B_n | X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+r} = j_r | X_n = i) \\ &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A' \cap B) &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r} \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T = n, A, X_n = i) \\ &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r} \mathbb{P}(T < +\infty, A, X_T = i) \end{aligned}$$

et donc le résultat. □

Cette formule est particulièrement utile, lorsqu'on prend pour temps d'arrêt le temps d'atteinte $T_i = \inf\{n \geq 1/X_n = i\}$ de la chaîne pour l'état i. Si $T_i < \infty$, on a automatiquement $X_{T_i} = i$; on a donc par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{T_i+1} = j_1, \ldots, X_{T_i+r} = j_r | T_i < +\infty) &= \mathbb{P}(X_1 = j_1, \ldots, X_r = j_r | X_0 = i) \\ &= p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{r-1},j_r}.\end{aligned}$$

On en tire le corollaire suivant, très utile :

Corollaire 13. *Soit* $T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$. *Conditionnellement à l'événement* $\{T_i < +\infty\}$, *la suite translatée* $(X_{T_i+n})_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov de matrice de transition* $\mathcal{P}$ *et d'état initial* i. *De plus cette suite est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_T$.

4. Classification des états

Nous allons définir une classification des états et en déduire des propriétés des chaînes de Markov. Les états d'une chaîne de Markov se répartissent en classes que l'on définit à partir de la matrice de transition.

Définition 14. *On dit que l'état* j *est* accessible *à partir de l'état* i, *s'il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $p_{i,j}^{(n)} > 0$. *On note* $i \rightsquigarrow j$. *(On a donc toujours* $i \rightsquigarrow i$*)*
Sur le graphe, si $i \neq j$, $i \rightsquigarrow j$ *s'il existe un chemin (orienté) du sommet* i *vers le sommet* j.

Proposition 15. *La relation d'accessibilité entre états est réflexive et transitive.*

Démonstration. Comme $p_{i,i}^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1$ pour tout état i, la relation est réflexive. Ensuite, si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow l$, alors $p_{i,j}^{(m)} > 0$ et $p_{j,l}^{(n)} > 0$ pour certains entiers m, $n \geq 0$. D'après le corollaire 9, on a :

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = l | X_0 = i) = \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_m = k | X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = l | X_0 = k) \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,l}^{(n)} > 0$$

d'où $i \rightsquigarrow l$. □

Proposition 16. *Soient* i, j *deux états ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) l'état j *est accessible à partir de l'état* i, *soit* $i \rightsquigarrow j$
b) le processus, partant de i, *passe par* j *avec probabilité strictement positive.*

Démonstration. D'abord, a) ⇒ b) est évident. Pour l'autre implication, montrons non a) ⇒ non b). On a donc pour tout $n \geq 0$, $p_{i,j}^{(n)} = 0$. Soit A l'événement "le processus passe par j". On a

$$\mathbb{P}(A | X_0 = i) = \mathbb{P}(\cup_{n\geq 0}\{X_n = j\} | X_0 = i) \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{n\geq 0} p_{i,j}^{(n)} = 0.$$

d'où la propriété b). □

Définition 17. *On dit que les état* i *et* j communiquent *et on écrit* $i \leftrightsquigarrow j$ *si on a à la fois* $i \rightsquigarrow j$ *et* $j \rightsquigarrow i$.

Proposition 18. *La relation de "communication" est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Les propriétés de réflexivité et de transitivité étant déjà vérifiées pour la relation d'accessibilité, elles restent naturellement encore valables pour la nouvelle relation. Enfin, cette dernière est symétrique par construction. □

Comme on a toujours $p_{i,i}^{(0)} = 1$, tout état communique avec lui même.

Les classes d'équivalence de cette relation sont les composantes fortement connexes du graphe. On les appelle souvent *composantes irréductibles* ou classes irréductibles.
Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux classes distinctes, on peut éventuellement aller, disons de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$, mais on ne peut alors retourner de $\mathcal{C}_2$ à $\mathcal{C}_1$. En revanche, tous les états d'une même classe communiquent.

Certaines classes peuvent ne comporter qu'un seul élément : c'est par exemple le cas si i un *état absorbant* i.e. $p_{i,i} = 1$ (ce qui entraîne pour $n \geq 0$ $p_{i,i}^{(n)} = 1$).
Une classe $\mathcal{C}_1$ telle que $\forall i \in C_1, \forall j \notin C_1, p_{i,j} = 0$ est une classe *close* (ou *fermée*) : sur le graphe, cela signifie qu'aucune arête ne sort de la classe.

Définition 19. *S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite irréductible.*

Exemple 0.
La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est irréductible (tous les états communiquent)

Exemple 1.
Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{0, 1, 2\}$, la matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne est irréductible. Tous les états communiquent, même si $p_{0,2} = p_{2,0} = 0$.

Exemple 2.
Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{0, 1, 2, 3\}$, la matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La chaîne comporte trois classes $\{0, 1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$. L'état 3 est absorbant ; les classes closes sont $\{0, 1\}$ et $\{3\}$. On peut voir que l'état 2 n'est plus visité après un certain temps (qui suit une loi géométrique). On va voir que les classes $\{0, 1\}$ et $\{3\}$ sont récurrentes alors que la classe $\{2\}$ est transiente.

5. Périodicité

Il s'agit d'étudier dans quelles conditions le temps qui sépare deux retours au même état j est ou n'est pas multiple d'un temps minimum. Pour ce faire, on introduit la notion de *période*.

Définition 20. *Soit $j \in E$. On appelle* période *de j, et on note $d(j)$, le P.G.C.D. de tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $p_{j,j}^{(n)} > 0$ (par convention, pgcd$(\emptyset) = +\infty$)*

$$d(j) = pgcd(n \geq 1, p_{j,j}^{(n)} > 0)$$

Si $d(j) = d \geq 2$, on dit que j est périodique de période d. Si $d(j) = 1$, on dit que j est apériodique. *Une chaîne apériodique est une chaîne dont tous les états sont apériodiques.*

En particulier, si $p_{ii} > 0$ (le graphe possède alors une boucle), i est apériodique.

Théorème 21.

Si i est périodique de période d finie et si $i \leftrightsquigarrow j$ $(j \neq i)$, alors j est aussi périodique de période d : la périodicité est une propriété de classe.

Démonstration. Si $i \leftrightsquigarrow j$, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$. Soit $s \geq 1$ un entier tel que $p_{i,i}^{(s)} > 0$ (s est donc un multiple de $d \geq 1$). On a alors $p_{j,j}^{(m+s+n)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(s)} p_{i,j}^{(n)} > 0$. Comme $p_{i,i}^{(s)} > 0$ entraîne $p_{i,i}^{(2s)} > 0$, on a aussi $p_{j,j}^{(m+2s+n)} > 0$. La période $d(j)$ de j divise donc à la fois $m+s+n$ et $m+2s+n$, donc aussi leur différence s. C'est vrai pour tout s tel que $p_{i,i}^{(s)} > 0$, donc $d(j)$ divise la période $d(i)$ de i. De la même façon on montre que $d(i)$ divise $d(j)$ et donc que $d(i) = d(j)$. $\square$

Exemple 1.
Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{0, 1, 2\}$, la matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $0 < p < 1$.
On vérifie avec le graphe qu'il y a une seule classe (récurrente), la chaîne est irréductible. Tous les états communiquent. De plus les lacets $0 \to 1 \to 0$ et $0 \to 1 \to 2 \to 0$ ont pour longueur 2 et 3 ; leur P.G.C.D. est $d = 1$. L'état 0 est donc apériodique. Par conséquent, les états 1 et 2 sont aussi apériodiques.

Exemple 2 : la chaîne d'Ehrenfest
Elle est périodique de période 2.

Exemple 3.
Considérons la chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{0, 1, 2, 3\}$, la matrice de transition

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que tous les états communiquent il y a donc une seule classe récurrente. Il y exactement deux lacets issus de 0 : $0 \to 2 \to 1 \to 0$ et $0 \to 3 \to 1 \to 0$ tous deux de longueur 3. La classe est donc périodique de période 3.

Exemple 4 : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
Elle possède une seule classe, elle est donc irréductible. De plus on voit facilement que $p_{0,0}^{(n)} > 0$ si et seulement si n est pair : par conséquent cette chaîne est périodique de période 2.

6. Etats récurrents et transients

Pour tout état j, désignons par T_j *le temps d'atteinte* de l'état j à partir de l'instant 1 ; autrement dit

$$T_j = \inf\{n \geq 1, X_n = j\}$$

Ce temps d'atteinte est un temps d'arrêt de la chaîne.
On notera également $N_j = \sum_{n \geq 0} 1_{X_n = j}$ le nombre de passages en j (**en comptant le point de départ**).
On a en particulier $\mathbb{P}^j(T_j < \infty) = \mathbb{P}^j(N_j > 1)$.

Définition 22. *On dit que l'état j est* récurrent *si, partant de l'état j, la probabilité que la chaîne de Markov retourne à l'état j en un temps fini est égale à 1, i.e. si $\mathbb{P}^j(T_j < +\infty) = \mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1$.*
Sinon, lorsque $\mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) < 1$, l'état j est transient *ou* transitoire.

Autrement dit si j est récurrent, la chaîne repasse presque sûrement par j en partant de j). Par exemple, un état absorbant est toujours récurrent. En revanche, un état transitoire est tel que $\mathbb{P}(T_j = +\infty | X_0 = j) > 0$. Il y a donc une probabilité strictement positive que la chaîne de Markov ne repasse plus jamais par l'état j.

Proposition 23. *Si j est récurrent, le nombre de passages en j en partant de j est presque sûrement infini : $\mathbb{P}^j(N_j = +\infty) = 1$, et a fortiori $\mathbb{E}^j[N_j] = \infty$.*
Si j est transient, le nombre de passages en j en partant de j (c'est-à-dire N_j conditionné par $X_0 = j$) suit une loi géométrique et est donc presque sûrement fini, et d'espérance finie.
De plus, si j est transient, le nombre de passages en j en partant de i est également p.s. fini et d'espérance finie.

Démonstration. Intuitivement, si on revient presque sûrement au moins une fois, on peut répéter l'argument une fois qu'on est revenu, et on revient donc au moins deux fois, etc.
Cela suggère une démonstration à l'aide de la propriété de Markov forte, en faisant intervenir le temps T_j de premier retour en j.
Soit $k > 1$. Alors, puisque $(N_j = k) \subset (T_j < \infty)$, on a, si $\mathbb{P}^j(T_j < \infty) \neq 0$,
$\mathbb{P}^j(N_j = k) = \mathbb{P}^j(N_j = k | T_j < \infty)\mathbb{P}^j(T_j < \infty)$. Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^j(N_j = k | T_j < \infty) &= \mathbb{P}^j(\sum_{n=0}^{T_j - 1} 1_{\{X_n = j\}} + \sum_{n=T_j}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}} = k | T_j < \infty) \\
&= \mathbb{P}^j(1 + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_{T_j+n} = j\}} = k | T_j < \infty)
\end{aligned}$$

On peut alors appliquer la propriété de Markov forte : conditionnellement à $T_j < \infty$, la chaîne (X_{T_j+n}) a même loi que la chaîne partant de j. Ainsi,
$\mathbb{P}^j(N_j = k | T_j < \infty) = \mathbb{P}^j(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}} = k - 1) = \mathbb{P}^j(N_j = k - 1)$.

Finalement, on a pour tout $k > 1$, $\mathbb{P}^j(N_j = k) = \mathbb{P}^j(N_j = k - 1)\mathbb{P}^j(T_j < \infty)$.

La suite $(\mathbb{P}^j(N_j = k))_{k \geq 1}$ est donc géométrique.

- Si j est récurrent : on a alors $\mathbb{P}^j(T_j < \infty) = 1$, donc cette suite est constante. Or $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}^j(N_j = k) = \mathbb{P}^j(N_j < \infty)$. On a donc une série de termes constants qui converge : chaque terme est donc nul, et finalement on a bien $\mathbb{P}^j(N_j = +\infty) = 1$.
- Si j est transitoire : on note $q := \mathbb{P}^j(T_j < \infty) < 1$. On a alors pour tout k
  $\mathbb{P}^j(N_j = k) = \mathbb{P}^j(N_j = 1)q^{k-1}$. On vérifie facilement $\mathbb{P}^j(N_j = 1) = \mathbb{P}^j(T_j = \infty) = 1 - q$. Par conséquent conditionnellement à $X_0 = j$, N_j suit bien une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}^j(T_j = \infty)$, et est bien d'espérance finie.
  Enfin, toujours si j est transitoire : si j n'est pas accessible à partir de $i \in E$, alors le nombre de passages en j en partant de i est p.s. nul. Si $i \rightsquigarrow j$ et $i \neq j$, en notant toujours T_j le temps d'atteinte de j, on a, grâce à la propriété de Markov forte, pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^i(N_j \geq k) &= \mathbb{P}^i(N_j \geq k | T_j < \infty)\mathbb{P}^i(T_j < \infty) \\
&= \mathbb{P}^i(\sum_{n \geq T_j} 1_{\{X_n = j\}} \geq k | T_j < \infty)\mathbb{P}^i(T_j < \infty) \\
&= \mathbb{P}^j(N_j \geq k)\mathbb{P}^i(T_{ij} < \infty) \leq \mathbb{P}^j(N_j \geq k)
\end{aligned}$$

□

On en déduit le corollaire très utile :

Corollaire 24. *j est récurrent si et seulement si $\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)}$ diverge.*
j est transitoire si et seulement si $\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)}$ converge.
De plus, si j est transitoire, $\lim_n p_{i,j}^{(n)} = 0$ quel que soit i.

DÉMONSTRATION. Il suffit pour les premiers points, en vertu de la proposition précédente, de vérifier $\mathbb{E}^j[N_j] = \sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)}$.
Or $\mathbb{E}^j[N_j] = \mathbb{E}[\sum_{n\geq 0} 1_{X_n=j}|X_0 = j]$. On peut permuter espérance et série (car série à termes positifs) et il vient $\mathbb{E}^j[N_j] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[1_{X_n=j}|X_0 = j] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = j) = \sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)}$.
Enfin, si j est transitoire, on a vu que le nombre de passages en j en partant de i est d'espérance finie : donc on obtient de la même manière :
$\mathbb{E}^i[N_j] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[1_{X_n=j}|X_0 = i] = \sum_{n\geq 0} p_{i,j}^{(n)}$. Cette série converge, donc son terme général tend vers 0. □

Exemple On considère la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec $p = \frac{1}{2}$. On va vérifier que 0 est récurrent. En effet, on voit facilement que si n est impair, $p_{0,0}^{(n)} = 0$, et si $n = 2m$ est pair, $p_{0,0}^{(2m)} = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}$. Par la formule de Stirling, on obtient $p_{0,0}^{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$. On en déduit que la série diverge, et donc que 0 est récurrent.
Par contre si $p > \frac{1}{2}$, la loi forte des grands nombres implique que X_n tend p.s. vers $+\infty$: par conséquent p.s., après un temps fini, la suite partant de 0 ne passe plus par 0 : 0 est donc transitoire.
On peut également faire explicitement le calcul de $p_{0,0}^{(n)}$ dans le cas de la marche aléatoire non biaisée en dimension 2 : on trouve que 0 est encore récurrent. En dimension supérieure ou égale à 3, 0 devient transitoire.

Proposition 25. *La récurrence est une propriété de classe : si $i \leftrightsquigarrow j$ et si i est récurrent, alors j est récurrent. Il en est par conséquent de même pour la transience.*

DÉMONSTRATION. On suppose $i \leftrightsquigarrow j$ et i récurrent, Donc $p_{i,j}^{(n_1)} > 0$ et $p_{i,j}^{(n_2)} > 0$ pour certains entiers n_1 et n_2. On en déduit :

$$\sum_n p_{j,j}^{(n_1+n+n_2)} \geq \sum_n p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(n_1)} = p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,j}^{(n_1)} \sum_n p_{i,i}^{(n)} = +\infty$$

□

On peut donc parler de classe récurrente et de classe transiente.

Théorème 26.

> **Décomposition de l'espace d'états** *L'espace d'états se partitionne en classe d'équivalence pour la relation de communication.*
> *– Une classe non close est transiente.*
> *– Une classe close* **FINIE** *est récurrente.*
> *En particulier, pour les chaînes de Markov* **à espace d'états finis***, les classes récurrentes sont les classes closes, les classes transientes sont les classes non closes.*
> *On en déduit également qu'une chaîne de Markov* **à espace d'états fini** *admet au moins un état récurrent.*

Rappelons qu'une classe $\mathcal{C}$ est close si et seulement si pour tout $i \in \mathcal{C}$, pour tout $j \notin \mathcal{C}$, $p_{ij} = 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une classe non close : il existe donc $i \in \mathcal{C}$ et $j \notin \mathcal{C}$ tel que $p_{ij} \neq 0$. Or i et j ne communiquent pas : puisque $i \rightsquigarrow j$, i n'est donc pas accessible à partir de j. Donc pour tout n, $\mathbb{P}(X_n = i | X_1 = j) = 0$. On en déduit $\mathbb{P}(T_i < \infty | X_1 = j) = 0$.
Finalement $\mathbb{P}(T_i = +\infty | X_0 = i) \geq \mathbb{P}(T_i = +\infty | X_0 = i, X_i = j)\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij} > 0$.
i est donc transient, et $\mathcal{C}$ est donc transitoire.

On considère maintenant une classe $\mathcal{C}$ close finie. On va procéder par l'absurde et supposer que tous les états de $\mathcal{C}$ sont transitoires. Soit $i \in \mathcal{C}$. Partant de i, la chaîne reste dans $\mathcal{C}$. Donc
$\mathbb{P}^i(\sum_{j \in \mathcal{C}} N_j = \infty) = 1$.
Cette somme étant finie, on en déduit que
$\mathbb{P}^i(\exists j \in \mathcal{C}, N_j = \infty) = 1$. Or quelque soit $j \in \mathcal{C}$, puisqu'on a supposé j transitoire, on a vu que $\mathbb{P}^i(N_j = \infty) = 0$.
On obtient donc une contradiction.

Ainsi toute classe close d'une chaîne à espace d'états fini est récurrente.

Une chaîne à espace d'états fini possède au moins une classe close, elle possède donc au moins un état récurrent. □

En particulier une chaîne de Markov à espace d'états fini n'ayant qu'une seule classe est automatiquement récurrente.

Description de l'évolution d'une chaîne de Markov à espace d'états finis
Si la chaîne part d'un état récurrent, la classe de l'état initial est close et la chaîne y reste.
Si la chaîne part d'un état transitoire, au bout d'un temps p.s. fini elle va sortir de la classe de cet état, et se trouvera dans une nouvelle classe. Au bout d'un temps p.s. fini la chaîne aura finalement atteint une classe récurrente, et y restera.
En particulier, en partant d'un état transitoire on est sûr d'atteindre en un temps fini un état récurrent.
En partant d'un état récurrent on ne peut pas atteindre un état transitoire.

Pour les chaînes de Markov à espace d'états infini il est facile de construire des contrexemples aux points précédents :
- La chaîne sur $\mathbb{N}$ définie par $X_n = n$ ne possède que des états transitoires, et pas d'état récurrent.
- La marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$ définie par $X_{n+1} = X_n + 1$ avec probabilité $p > \frac{1}{2}$ et $X_{n+1} = X_n - 1$ avec probabilité $1 - p$ est irréductible. Néanmoins 0 est transitoire : en effet, la loi forte des grands nombres implique que $X_n \to +\infty$ *p.s.*. Donc le nombre de passages en 0 est presque sûrement fini.

Néanmoins il est toujours vrai qu'en partant d'un état récurrent on ne peut pas atteindre un état transitoire : en effet on a vu qu'un état récurrent appartient à une classe close.

Exemple de la ruine du joueur On suppose que la fortune totale $a + b = N$ est fixée. On a vu que les seuls états non transitoires sont 0 et N : au bout d'un temps p.s. fini, la chaîne atteint l'un de ces états, c'est-à-dire que l'un des joueurs finit ruiné.
On note pour tout a de E $q_a = \mathbb{P}^a(T_0 < +\infty)$ la probabilité que A finisse ruiné en partant d'une fortune de a. De toute évidence si $a = 0$, $q_0 = 1$; de même, $q_N = 0$.
Si $0 < a < N$, on a $q_a = \mathbb{P}(T_0 < +\infty | X_0 = a) = \sum_{k \in E} \mathbb{P}(T_0 < +\infty | X_0 = a, X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = a) = pq_{a+1} + (1-p)q_{a-1}$.
C'est une relation de récurrence linéaire pour la suite q_a ; on connaît la forme générale des solutions, et on peut déterminer la solution vérifiant les deux conditions limites. Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, on a $q_a = c_1 a + c_2$; les conditions impliquent $c_2 = 1$ et $c_1 = -\frac{1}{N}$. Finalement $q_a = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$. On retrouve ainsi un résultat qu'on avait obtenu à l'aide de martingales.
On peut également s'intéresser à l'espérance du temps de jeu en partant de a, notée m_a : on a $m_0 = m_N = 0$, et $m_a = 1 + pm_{a+1} + (1-p)m_{a-1}$. Si $p = \frac{1}{2}$, $m_a = -a^2$ est solution particulière, et la solution générale est $m_a = c_1 a + c_2 - a^2$. Les conditions aux limites imposent $c_2 = 0$ et $c_1 = N$; finalement $m_a = aN - a^2 = ab$: on retrouve là encore un résultat qu'on avait obtenu à l'aide de martingales et de théorème d'arrêt.

7. Lois de probabilités stationnaires

Dans ce paragraphe, on note les lois de probabilité μ sur l'ensemble des états E comme des vecteurs lignes $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$, où $0 \leq \mu_i \leq 1$ et $\sum_i \mu_i = 1$.

Définition 27. *Soit ν une loi de probabilité sur l'ensemble des états. Elle est dite stationnaire, ou invariante, si $\nu = \nu\mathcal{P}$ ou, de façon équivalente, si pour tout $j \in E$ on a*

$$\nu_j = \sum_{i \in E} \nu_i p_{i,j}$$

On peut aussi caractériser ${}^t\nu$ comme un vecteur propre de ${}^t\mathcal{P}$ associé à la valeur propre 1, puisque $\nu = \nu\mathcal{P}$ si et seulement si ${}^t\nu = {}^t\mathcal{P}{}^t\nu$.

Supposons qu'il existe une loi de probabilité stationnaire ν ; pour tout $n \geq 0$ on a aussi

$$\nu = \nu\mathcal{P}^{(n)}$$

Il en résulte que si on prend ν comme loi de probabilité initiale, i.e. $\mathbb{P}(X_0 = i) = \nu_i$, alors la loi de probabilité de X_n qui est donnée par

$$\mu^{(n)} = \nu\mathcal{P}^{(n)}$$

est donc indépendante de n et est égale à ν. De façon générale, si l'on prend ν comme loi de probabilité initiale, la chaîne de Markov devient un processus stationnaire, c'est-à-dire, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$, on a

$$\mathcal{L}(X_n, \dots, X_{n+k}) = \mathcal{L}(X_0, \dots, X_k)$$

D'autre part, si X_n converge en loi vers une loi ν, on a alors $\nu_0\mathcal{P}^n \to \nu$; en considérant la suite $(\nu_0\mathcal{P}^n)\mathcal{P}$ on voit que $\nu = \nu\mathcal{P}$, et ν est donc une loi invariante : les lois stationnaires sont donc très liées au comportement asymptotique de la chaîne.

On va voir que dans le cas fini, il existe toujours au moins une probabilité stationnaire. Par contre, dans le cas dénombrable, il n'existe pas nécessairement de probabilité stationnaire, ou au contraire il peut en exister une infinité.

Exemples Par exemple, la mesure de Lebesgue est invariante pour la marche aléatoire non biaisée sur $\mathbb{Z}$, mais il n'y a pas de mesure de probabilité invariante.
Pour le processus sur $\mathbb{N}$ défini par $X_n = n$, il n'existe pas de mesure invariante.

On peut de manière générale vérifier la proposition ci-dessous.

Proposition 28. *Si ν est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, $\nu(i) = 0$. En particulier, si un processus n'a que des états transitoires, alors il n'admet pas de loi de probabilité stationnaire.*

DÉMONSTRATION. Soit ν une loi de probabilité stationnaire et i un état transitoire. ν vérifie donc pour tout n, $\nu\mathcal{P}^n = \nu$, donc $\nu_i = \sum_j \nu_j p_{ji}^{(n)}$. Or si i est transitoire, $p_{ji}^{(n)}$ tend vers 0. On peut inverser série et limite par convergence dominée car $|p_{ji}^{(n)}| \leq 1$ et $\sum_j \nu_j = 1$, et on en déduit $\nu_i = 0$.
Donc si un processus n'a que des états transitoires, une loi de probabilité stationnaire vérifierait $\nu_i = 0$ pour tout i de E, ce qui est impossible.

□

La situation est assez différente dans les cas finis ou dénombrables. Dans un premier temps on va donc regarder particulièrement les chaînes à espace d'état fini.

7.A. Chaînes de Markov à espace d'états fini : lois invariantes. Les résultats principaux de tout ce chapitre peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 29.

Soit (X_n) une chaîne de Markov à ensemble d'états **fini**. *Alors elle possède* **au moins une loi de probabilité stationnaire**.
De plus si (X_n) est **irréductible**, *alors la loi de probabilité stationnaire est* **unique**. *On la notera ν ; elle vérifie pour tout i dans E, $\nu(i) = \frac{1}{\mathbb{E}^i[T_i]} > 0$ où T_i est le temps de premier retour en i.*
Si de plus (X_n) est **irréductible et apériodique**, *alors $\mathcal{P}^n$ converge vers la matrice dont toutes les lignes sont constantes égales à ν. En particulier, quelle que soit la loi de X_0, X_n converge en loi vers ν.*

Démonstration. (La formule donnant explicitement $\nu(x)$ sera démontrée dans la section suivante.) Ce sont essentiellement des résultats d'algèbre linéaire.

On va donc commencer par montrer l'existence. On a vu que $\mathcal{P}$ admet 1 comme valeur propre, et que le vecteur constant dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est vecteur propre (à droite). On en déduit que ${}^t\mathcal{P}$ admet également 1 comme valeur propre. Il reste à vérifier qu'on peut trouver un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont positives. Il suffit ensuite de le diviser par la somme de ses coordonnées pour obtenir un vecteur qui corresponde bien à une loi de probabilité.
Soit u un vecteur propre pour ${}^t\mathcal{P}$ pour la valeur propre 1. On va vérifier que le vecteur v défini par $v_i = |u_i|$ est également propre de valeur propre 1. En effet on a pour tout i,

$$\sum_j v_j p_{ji} - v_i = \sum_j |u_j| p_{ji} - |u_i| \geq \left| \sum_j u_j p_{ji} \right| - |u_i| = 0$$

Or on voit facilement $\sum_i (\sum_j v_j p_{ji} - v_i) = 0$.
Par conséquent, quel que soit i, $\sum_j v_j p_{ji} - v_i = 0$: v est donc bien un vecteur propre de ${}^t\mathcal{P}$ avec valeur propre 1 : on a bien existence d'une loi de probabilité invariante.

Supposons maintenant $\mathcal{P}$ irréductible. On va montrer que dans ce cas, l'espace propre pour $\mathcal{P}$ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, ce qui entrainera l'analogue pour ${}^t\mathcal{P}$.
En effet, soit u un vecteur propre pour $\mathcal{P}$ de valeur propre associée 1. On note $u_{i_0} = \max_i(u_i)$. On raisonne par l'absurde, et on fait donc l'hypothèse que les composantes de u ne sont pas toutes égales : il existe donc j_0 tel que $u_{j_0} < u_{i_0}$. Pour simplifier les notations, on suppose $i_0 = 1$ et $j_0 = 2$. La chaîne est supposée irréductible, donc il existe n tel que $p_{1,2}^{(n)} > 0$. u est également vecteur propre de $\mathcal{P}^n$ et on a alors
$u_1 = \sum_j p_{1j}^{(n)} u_j = p_{12}^{(n)} u_2 + \sum_{j\neq 2} p_{1j}^{(n)} u_j < u_1 \sum_j p_{1j}^{(n)}$.
D'où $u_1 < u_1$ et la contradiction.

Supposons maintenant que de plus la chaîne est apériodique. La démonstration se base alors sur un lemme d'algèbre linéaire et sur le théorème de Perron Frobénius, concernant les matrices strictement positives (une matrice A est dite strictement positive ($A > 0$) si tous ses coefficients sont strictement positifs).

Lemme 30. *Soit $\mathcal{P}$ la matrice d'une chaîne de Markov à espace d'états finis irréductible et apériodique. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $(i, j) \in E^2$, pour tout $n > n_0$, $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Remarquons que, la chaîne étant irréductible, on sait que pour tout (i, j) il existe un tel n. L'intérêt du lemme est de garantir l'existence d'un n qui ne dépend pas de i et j.
La preuve du lemme se trouve par exemple dans le livre *Thèmes de probabilités et statistique* de Paul Toulouse. Elle se fait en trois étapes :

(1) On note $N(i) = \{n > 0, p_{i,i}^{(n)} > 0\}$. On commence par montrer grâce à Bezout que $N(i)$ contient deux entiers consécutifs $n(i)$ et $n(i)+1$.

(2) On vérifie que pour tout $n \geq n(i)^2$, $p_{i,i}^{(n)} > 0$.
Donc il existe n_1 tel que pour tout i pour tout $n \geq n_1$, $p_{i,i}^{(n)} > 0$.

(3) Si $i \neq j$, il existe n_{ij} tel que $p_{i,j}^{(n_{ij})} > 0$. Si $n_0 = \max_{i,j}(n_{ij} + n_1)$, on a si $n \geq n_0$, pour tout (i,j), $n = n_{ij} + p$ avec $p \geq n_1$ et donc $p_{i,j}^{(n)} \geq p_{i,j}^{(n_{ij})} p_{i,i}^{n_1} > 0$.

Théorème 31.

Théorème de Perron Frobenius (admis) *Soit A une matrice réelle dont tous les coefficients sont strictement positifs. Alors il existe une valeur propre de A de module maximal notée λ_m qui est simple ; de plus toutes les autres valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à λ_m.*

Supposons donc $\mathcal{P}$ apériodique. Commençons dans un premier temps par supposer de plus $\mathcal{P}_{ij} > 0$ pour tout (i,j). On peut alors appliquer le théorème de Perron Frobenius à $\mathcal{P}$. Vérifions de plus que 1 est bien la valeur propre de module maximal de $\mathcal{P}$: en effet, soit u un vecteur propre pour $\mathcal{P}$ de valeur propre λ, et soit i_0 tel que $|u_{i_0}| = \max(|u_i|)$.
On a alors $|\lambda u_{i_0}| = |\sum_j p_{i_0,j} u_j|$. Donc $|\lambda u_{i_0}| \leq |u_{i_0}|$, par conséquent $|\lambda| \leq 1$.
D'après Perron Frobénius, toutes les autres valeurs propres de $\mathcal{P}$ sont de module strictement inférieur à 1.
De manière générale, si on ne suppose pas $\mathcal{P} > 0$. On sait qu'il existe un entier m tel que $\mathcal{P}^m > 0$ et on peut appliquer l'argument précédent à $\mathcal{P}^m$: 1 est donc la seule valeur propre de $\mathcal{P}^m$ de module 1, et elle est simple ; or si u est vecteur propre de $\mathcal{P}$ pour la valeur propre λ, u est également vecteur propre de $\mathcal{P}^m$ pour la valeur propre λ^m. On en déduit là encore que 1 est l'unique valeur propre de $\mathcal{P}$ de module 1, qu'elle est simple, et que toutes les autres valeurs propres de $\mathcal{P}$ sont de module strictement inférieur à 1.

On en déduit (par exemple par décomposition de Jordan) qu'il existe une matrice inversible Q, et une matrice A de valeurs propres toutes strictement inférieures à 1 telles que :

$$\mathcal{P} = Q \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) Q^{-1}$$

De plus on sait que le vecteur dont toutes les coordonnées sont 1 est vecteur propre pour la valeur propre 1 : la première colonne de Q est donc formée de 1.
Soit ν la loi de probabilité invariante : on sait qu'elle est vecteur propre pour ${}^t\mathcal{P}$: par conséquent la première ligne de Q^{-1} est égale à $c\nu$ où c est une constante. Comme $QQ^{-1} = Id$ on vérifie en fait $c = 1$.
Puisque les valeurs propres de A sont toutes de module strictement inférieur à 1, on sait que A^n converge vers 0 (conséquence par exemple de la décomposition de Jordan). Par conséquent,

$$\mathcal{P}^n = Q \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A^n \end{array} \right) Q^{-1} \to Q \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) Q^{-1} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \\ \vdots \\ \nu \end{pmatrix}$$

Finalement, P^n converge vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à ν. Donc quelle que soit la loi initiale μ_0, $\mu_0 \mathcal{P}^n$ converge vers ν : il y a quelle que soit la loi initiale, convergence en loi de X_n vers la loi ν.

□

Remarques :
– Si la matrice $\mathcal{P}$ est symétrique, les vecteurs propres de $\mathcal{P}$ et de ${}^t\mathcal{P}$ sont les mêmes, et la loi uniforme sur E est donc stationnaire.

– Si la chaîne ne possède qu'une classe récurrente, mais également des états transitoires, au bout d'un temps fini la chaîne aura atteint la classe récurrente et se comportera donc comme une chaîne irréductible. La chaîne possède donc une mesure de probabilité stationnaire unique, qui a pour support la classe récurrente.
– Si une chaîne possède plusieurs classes récurrentes, elle admet pour chaque classe une loi de probabilité stationnaire unique ayant pour support cette classe. Toute combinaison linéaire convexe de ces lois est à nouveau une loi stationnaire de la chaîne; on peut montrer que ce sont les seules : la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est égale au nombre de classes récurrentes de la chaîne.
– Si la chaîne est irréductible périodique de période 2, si la loi initiale est un Dirac δ_1, on voit que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0$ pour tout n impair, mais $\mathbb{P}(X_n = 1)$ ne converge pas vers 0 puisque 1 est récurrent : il n'y a pas convergence en loi. Evidemment, si X_0 suit la loi stationnaire ν, X_n également et on a alors bien convergence en loi.

Exemple : le modèle à 2 états

La matrice de transition du système est $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

La probabilité invariante (μ_1, μ_2) vérifie $\left\{ \begin{array}{lcl} (1-\alpha)\mu_1 + \beta\mu_2 & = & \mu_1 \\ \alpha\mu_1 + (1-\beta)\mu_2 & = & \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 & = & 1 \end{array} \right.$

On obtient $\mu_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ et $\mu_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Si α et β sont strictement compris entre 0 et 1, la chaîne est récurrente apériodique, et X_n converge donc en loi vers μ quelle que soit la loi invariante.

On peut également déduire du calcul précédent que l'espérance du temps de retour en 1 en partant de 1 est $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$.

Exemple : le modèle de diffusion d'Ehrenfest. Rappelons que le processus possède $(a+1)$ états : $0, 1, \ldots, a$ de plus, la matrice de transition est définie par

$$p_{j,j-1} = \frac{j}{a} \ (1 \leq j \leq a); \quad p_{j,j+1} = 1 - \frac{j}{a} \ (0 \leq j \leq a-1); \quad p_{k,l} = 0 : \text{ sinon}$$

Tous les états communiquent : le processus est donc irréductible. Il est facile de voir que 0 est de période 2, il en est donc de même pour tous les états. En revanche le théorème 29 permet d'affirmer que le processus admet une et une seule loi de probabilité stationnaire $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_a)$ avec $\nu_i = 1/\mathbb{E}^i[T_i]$. En fait, au lieu de calculer l'espérance mathématique des temps d'atteinte, on peut déterminer ν directement à partir de $\nu = \nu\mathcal{P}$, c'est-à -dire résoudre le système

$$\nu_j = \sum_{i=0}^{a} \nu_i p_{i,j} \quad (0 \leq j \leq a)$$

dont on sait déjà qu'il y a une solution unique lorsque les ν_i sont positifs et de somme égale à 1. On peut donc réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_0 = \frac{\nu_1}{a}, \quad \nu_a = \frac{\nu_{a-1}}{a}, \\ \nu_k = \left(1 - \frac{k-1}{a}\right)\nu_{k-1} + \frac{k+1}{a}\nu_{k+1} \quad (1 \leq k \leq a-1) \end{array} \right.$$

On calcule successivement $\nu_1 = a\nu_0$, $\nu_2 = (a(a-1)/2)\nu_0$, et par récurrence $\nu_k = \binom{a}{k}\nu_0$. Comme par ailleurs on doit avoir $1 = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_a = \nu_0 2^a$. La loi de probabilité stationnaire est donc la loi binomiale $B(a, 1/2)$.

On peut également en déduire, pour tout k, $\mathbb{E}^k[T_k] = \frac{2^k}{\binom{a}{k}}$.

La chaîne n'étant pas périodique, il n'y a pas en général convergence en loi de la suite X_n vers la loi binomiale. Mais si on change légèrement le processus en prenant comme matrice de transition $(1-\epsilon)\mathcal{P}+\epsilon\mathrm{Id}$ le processus devient apériodique, et le vecteur propre pour la valeur propre 1 n'a pas changé.

Le premier point du théorème ci-dessous sera démontré plus loin dans le cas général; le deuxième point est admis.

Théorème 32.

Théorème ergodique et théorème central limite
On considère une chaîne de Markov irréductible d'espace d'états fini. On note μ son unique loi de probabilité invariante. On a alors pour toute fonction f sur E

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in E}\frac{f(i)}{\mathbb{E}^i[T_i]} = \int f d\mu. \quad p.s.$$

On dit que la chaîne est **ergodique**.
En particulier, on a pour tout état i de E

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{(X_k=i)} = \mu(i) \quad p.s.$$

De plus,

$$\sqrt{n}\left(\frac{f(X_0)+\cdots+f(X_{n-1})}{n} - \int f d\mu\right) \text{ converge en loi vers une loi normale centrée}$$

En particulier, cela signifie que la proportion du temps que la chaîne passe dans un état converge vers le poids de cet état pour la probabilité stationnaire.
On exprime parfois l'ergodicité en disant qu'à la limite, il y a égalité entre les moyennes temporelles (selon l'indice n) et les moyennes spatiales (selon μ). Cela peut permettre par exemple d'estimer la probabilité invariante μ.

7.B. Retour au cas général : états récurrents nuls et états récurrents positifs. Le cas dénombrable demande une classification des états encore plus fine : on est amené à définir la notion de positivité. Rappelons que l'on a vu qu'un état j est dit récurrent si $\mathbb{P}(T_j < +\infty | X_0 = j) = 1$. Intéressons nous maintenant à l'espérance de ce temps retour.

Définition 33. *Pour j un état d'une chaîne de Markov, on définit le* **temps d'atteinte moyen** *de j à partir de i*

$$M_{i,j} = \mathbb{E}(T_j|X_0 = i) = \sum_{n\geq 1} n\mathcal{P}(T_j = n|X_0 = i)$$

La quantité $M_{j,j}$ est appelée **temps de retour moyen dans** *j et $1/M_{j,j}$ est la* **fréquence moyenne de retour** *en j.*
On dira que j est un état **positif** *si $M_{j,j} < +\infty$, sinon on dira que j est un état* **nul** .

Si j est transient, alors $P(T_j = +\infty|X_0 = j) > 0$ et donc $M_{j,j} = +\infty$; un état transient est forcément nul.

Les états récurrents nuls sont donc entre les états transients et les états récurrents positifs. Ils sont récurrents mais leur temps moyen de récurrence est infini comme pour les états transients.

Le critère suivant dont nous verrons une démonstration partielle plus tard permet de caractériser la positivité d'un état récurrent.

Théorème 34.

Un état récurrent j d'une chaîne de Markov est nul si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} p_{j,j}^{(n)} = 0.$$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 35.

> *La positivité, comme la nullité, est une propriété de classe.*

Démonstration. Soit i un état récurrent nul et j un autre état, appartenant à la même classe que i. Puisque i et j communiquent, il existe des entiers n_0 et n_1 tels que

$$p_{i,j}^{(n_0)} > 0 \quad et \quad p_{j,i}^{(n_1)} > 0.$$

On en déduit :

$$p_{i,i}^{(n_0+m+n_1)} \geq p_{i,j}^{(n_0)} p_{j,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n_1)}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on voit alors que la nullité de i entraîne celle de j. □

Ainsi une classe d'une chaîne de Markov est soit transiente, soit récurrente nulle, soit récurrente positive.

Exemple

Pour la marche aléatoire simple non biaisée sur $\mathbb{Z}$: on a vu qu'elle est récurrente ; le calcul précédent de $p_{0,0}^{(n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ montre qu'elle est en fait récurrente nulle.

Lorsque l'espace d'états est fini, on peut être plus précis.

Proposition 36. *Si l'espace des états est fini, les états récurrents sont tous positifs.*

Démonstration. Soit i un état récurrent. Si i est absorbant (seul dans une classe) alors pour tout $n \geq 0$, $p_{i,i}^{(n)} = 1$, et donc par le théorème 35 i est récurrent positif. Si i n'est pas seul dans sa classe, il communique au moins avec un autre état j. Supposons que cette classe récurrente, notée $\mathcal{C}$, soit nulle. Soit n_0, tel que $p_{j,i}^{(n_0)} > 0$. On a lors

$$p_{i,i}^{(n_0+m)} \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n_0)}$$

et donc par le théorème 35 $\lim_{m\to+\infty} p_{i,j}^{(m)} = 0$. Puisque l'espace des états est fini, la classe $\mathcal{C}$ l'est aussi, et par conséquent

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j\in\mathcal{C}} p_{i,j}^{(m)} = 0.$$

Comme il est impossible de quitter une classe récurrente, ceci est en contradiction avec le fait que :

$$1 = \sum_{j\in E} p_{i,j}^{(m)} = \sum_{j\in\mathcal{C}} p_{i,j}^{(m)}.$$

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 37. *Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini est forcément récurrente positive.*

7.C. Cas général : retour aux mesures stationnaires. Soit (X_n) une chaîne irréductible récurrente. On va expliciter une mesure invariante (qui ne sera pas en général une probabilité !) ; dans le cas où la chaîne est positive, on verra en particulier qu'elle est finie et qu'il existe donc une loi de probabilité stationnaire, qui, comme on le verra dans un second temps, sera unique.

Théorème 38.

Soit (X_n) une **chaîne irréductible récurrente** *avec un nombre au plus dénombrable d'états, et soit $i \in E$. On note pour tout j de E*

$$u_j^{(i)} = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} | X_0 = i\right]$$

Alors la mesure ν_i définie par $\nu_i(j) = u_j^{(i)}$ est stationnaire ; elle vérifie $\nu_i(i) = 1$, $\nu_i(j) < \infty$ pour tout j, et $\nu_i(E) = \mathbb{E}[T_i|X_0 = i]$.
De plus, toutes les mesures stationnaires sont proportionnelles.
Ainsi, si la chaîne est **irréductible récurrente positive**, *$\nu_i(E) < \infty$ pour tout i, et* **il existe une unique loi de probabilité stationnaire**. *Cette loi de probabilité est donnée par*

$$\mu(i) = \frac{1}{M_{i,i}} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_i|X_0 = i]}$$

Si la chaîne est **irréductible récurrente nulle**, *$\nu_i(E) = +\infty$ et* **il n'existe pas de loi de probabilité stationnaire**.

$u_j^{(i)}$ est donc l'espérance du temps que l'on passe en j entre deux passages successifs en i.

DÉMONSTRATION. On peut commencer par remarquer que, la chaîne étant récurrente, $T_i < \infty$ p.s. D'autre part, on peut vérifier que l'irréductibilité de la chaîne entraine $\nu_i(j) > 0$. De plus on vérifie facilement $\nu_i(i) = 1$.

Montrons maintenant que ν_i est stationnaire.

On peut écrire

$$u_j^{(i)} = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} 1_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} | X_0 = i\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[1_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} | X_0 = i\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i - 1 | X_0 = i)$$

Si $j \neq i$, on a

$$u_j^{(i)} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i - 1 | X_0 = i) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i)$$

D'autre part, pour $i = j$, on a également

$$u_i^{(i)} = 1 = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = i, n \leq T_i | X_0 = i)$$

Finalement, pour tout j :

$$\begin{aligned} u_j^{(i)} &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 = j, 1 \leq T_i | X_0 = i) + \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i) \\ &= p_{i,j} + \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i) \end{aligned}$$

Maintenant pour $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i) &= \sum_{k \neq i} \mathbb{P}(X_{n-1} = k, X_n = j, n \leq T_i | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \neq i} \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = k, n \leq T_i, X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = k, n \leq T_i | X_0 = i)\end{aligned}$$

Or l'événement $\{n \leq T_i\} = \{X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_{n-1}$. Ainsi $\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = k, n \leq T_i, X_0 = i) = p_{k,j}$. Par suite

$$\begin{aligned}u_j^{(i)} &= p_{i,j} + \sum_{n \geq 2} \sum_{k \neq i} p_{k,j} \mathbb{P}(X_{n-1} = k, n \leq T_i | X_0 = i) \\ &= p_{i,j} + \sum_{k \neq i} p_{k,j} \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(X_{n-1} = k, n \leq T_i | X_0 = i) = p_{i,j} + \sum_{k \neq i} p_{k,j} \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = k, n \leq T_i - 1 | X_0 = i) \\ &= p_{i,j} + \sum_{k \neq i} p_{k,j} u_k^{(i)} = \sum_k u_k^{(i)} p_{k,j}\end{aligned}$$

ν_i est donc bien une mesure invariante.

Par conséquent ν_i est également invariante par $\mathcal{P}^n$ pour tout entier n. Or si $j \neq i$, puisque la chaîne est irréductible, il existe m tel que $p_{j,i}^{(m)} > 0$. On a alors

$$1 = u_i^{(i)} = \sum_k u_k^{(i)} p_{ki}^{(m)} \geq u_j^{(i)} p_{ji}^{(m)}$$

On en déduit que $\nu_i(j)$ est bien fini pour tout j.

D'autre part, dans $[0, +\infty]$, tous les termes étant positifs on peut échanger les séries et les espérances, et on obtient :

$$\begin{aligned}\nu_i(E) = \sum_j u_j^{(i)} &= \sum_j \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n = j, n \leq T_i - 1\}} | X_0 = i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 0} 1_{\{n \leq T_i - 1\}} | X_0 = i\right] \\ &= \mathbb{E}[T_i | X_0 = i] = M_{i,i}\end{aligned}$$

Ainsi si i est récurrent positif, $M_{i,i} < +\infty$ et $\mu = (\nu_i / M_{i,i})$ est bien une loi de probabilité stationnaire.

Il reste à montrer que les mesures invariantes sont uniques à coefficient multiplicatif près. Soit donc $\tilde{\mu}$ une mesure invariante (non nulle). On commence par montrer que $\tilde{\mu}$ charge tous les états. En effet on sait qu'il existe i tel que $\mu(i) > 0$. Or pour tout état k il existe m tel que $p_{i,k}^{(m)} > 0$. On a alors

$$\tilde{\mu}(k) = \sum_l tilde\mu(l) p_{lk}^{(m)} \geq \tilde{\mu}(i) p_{ik}^{(m)} > 0$$

Il suffit donc de vérifier que $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}(i)}$, qui vérifie $\mu(i) = 1$, est égale à ν_i et est donc bien déterminée.
On a, pour tout j, $\mu(j) = p_{j,i} + \sum_{k \neq i} \mu(k) p_{j,k}$
On en déduit que pour tout j, $\mu(j) \geq p_{j,i}$. En reportant dans la somme de la formule précédente, on obtient $\mu(j) \geq p_{j,i} + \sum_{k \neq i} p_{k,i} p_{j,k} \geq p_{j,i} + \mathbb{P}(X_2 = j, T_i \geq 2 | X_0 = i)$

On montre finalement ainsi par récurrence que si $k \neq i$, on a pour tout entier n
$\mu(j) \geq \mathbb{P}^i(X_1 = j, T_i \geq 1) + \mathbb{P}^i(X_2 = j, T_i \geq 2) + \ldots \mathbb{P}^i(X_n = j, T_i \geq n)$
En faisant tendre n vers l'infini on obtient $\mu \geq \nu_i$.
Supposons que $\mu \neq \nu_i$, c'est-à-dire qu'il existe j tel que $\mu(j) < \nu_i(j)$. Alors $\mu - \nu_i$ est bien une mesure ; elle est également invariante, et vérifie $\mu(i) - \nu_i(i) = 0$. On en déduit alors que cette mesure est nulle. En effet, soit $j \in E$. i et j communiquent, donc il existe n tel que $\mathcal{P}_{ji}^n > 0$. On a alors
$0 = (\mu - \nu_i)(i) = \sum_k (\mu - \nu_i)(k) \mathcal{P}_{ki}^n \geq \mathcal{P}_{ji}^n (\mu - \nu_i)(j)$
Donc $\mu(j) - \nu_i(j) = 0$

Ainsi si la suite est irréductible récurrente positive, la loi de probabilité invariante est unique et peut s'obtenir en normalisant ν_i par $\nu_i(E)$ (le résultat ne dépendant pas du point i choisi) : donc elle vérifie pour tout i

$$\mu(i) = \frac{\nu_i(i)}{\nu_i(E)} = \frac{1}{\nu_i(E)} = \frac{1}{M_{i,i}}$$

□

7.D. Cas général : convergence, théorème ergodique. On définit les variables aléatoires suivantes

$$N_n(j) = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_n=j\}},$$

c'est le nombre de fois que le processus séjourne dans j dans l'intervalle de temps $[0, n-1]$;

$$F_n(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_n=j\}} = \frac{1}{n}N_n(j),$$

c'est la fréquence de séjour dans j dans l'intervalle de temps $[0, n-1]$.

Si les X_n étaient indépendantes et de même loi, on pourrait appliquer la loi forte des grands nombres à la suite F_n. Le théorème suivant montre que c'est presque le cas avec des chaînes de Markov, en remplaçant la loi commune des (X_n) de la LFGN par la loi invariante des X_n.

Théorème 39.

Si une chaîne de Markov est irréductible et de loi initiale quelconque, on a alors pour tout état j

$$F_n(j) = \frac{N_n(j)}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}[T_j|X_0 = j]} = \frac{1}{M_{j,j}} \quad p.s.$$

DÉMONSTRATION. Pour simplifier les notations, on oublie les dépendances en j.
Si j est transitoire, la suite (N_n) est p.s. bornée, donc $\frac{N_n}{n}$ tend vers 0 ; de plus on a bien $\mathbb{E}[T_j|X_0 = j] = \infty$, donc la première égalité est vérifiée.
Si j est récurrent, la suite (N_n) est croissante et tend vers l'infini ; le temps d'atteinte de j est p.s. fini quel que soit le point de départ, et on peut donc supposer qu'on part de j. On considère alors la suite $T^{(n)}$ des passages successifs en j ($T^{(1)} = T_j$ est le temps de premier retour en j). On a alors

$$T^{(N_n-1)} \leq n \leq T^{(N_n)}$$

Par conséquent

$$\frac{T^{(N_n-1)}}{N_n} \leq \frac{n}{N_n} \leq \frac{T^{(N_n)}}{N_n}$$

Or $T^{(n)}$ est la somme des incréments $T^{(k)} - T^{(k-1)}$ (pour k allant de 1 à n, en notant $T^{(0)} = 0$), et la propriété de Markov forte entraine que ces incréments sont indépendants et de même loi (la loi de $T^{(1)} = T_j$). Si j est un état positif on peut donc appliquer la loi forte des grands nombres : $\frac{T^{(n)}}{n}$ converge p.s. vers $\mathbb{E}[T_j|X_0 = j] = M_{j,j}$. Si j est un état nul, l'espérance précédente est infinie, mais la propriété reste vraie par convergence monotone.
Comme N_n converge p.s. vers l'infini, on a finalement p.s. $\frac{T^{(N_n)}}{N_n} \to M_{j,j}$.
Puisque, $\frac{N_n-1}{N_n} \to 1$ p.s., on a également

$\frac{T_j^{(N_n-1)}}{N_n} \to M_{j,j}$.
Finalement, $F_n(j) = \frac{N_n}{n}$ converge p.s. vers $\frac{1}{\mathbb{E}^j[T_j]}$. □

Ce théorème possède de nombreux corollaires.

Corollaire 40. *Si une chaîne de Markov est* **irréductible**, *la suite* $\mathcal{P}^n$ *converge* **au sens de Cesaro** *vers la matrice* π *dont toutes les lignes sont égales et vérifie* $\pi_{ij} = \frac{1}{\mathbb{E}^j[T_j]}$
Si la chaîne n'est pas positive, la limite π *est nulle.*
Si la chaîne est **irréductible récurrente positive**, *toutes les lignes de la matrice limite* π *sont égales à l'unique loi de probabilité invariante.*
On admettra le point suivant (vu dans le cas fini) : si la chaîne est **irréductible récurrente positive apériodique**, *la suite* $\mathcal{P}^n$ *converge (au sens usuel) vers la matrice* π *; par conséquent quelle que soit la loi initiale, la suite* (X_n) *converge en loi vers l'unique loi stationnaire.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème précédent, $F_n(j)$ converge p.s. ; de plus, $0 \leq F_n(j) \leq 1$: on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Or quel que soit i,

$$\mathbb{E}^i[1_{\{X_n=j\}}] = p_{i,j}^{(n)}$$

donc

$$\mathbb{E}^i[F_n(j)] = \frac{1}{n}(p_{i,j} + \cdots + p_{i,j}^{(n)}),$$

Par conséquent $\lim_n \frac{1}{n}(p_{i,j} + \cdots + p_{i,j}^{(n)}) = \frac{1}{\mathbb{E}^i[T_i]} = \pi_{i,j}$ □

En particulier, si $p_{i,j}^{(n)}$ tend vers 0, $\pi_{i,j} = 0$ et on en déduit que i est un état nul ; inversement, si i est positif, la convergence au sens de Cesaro vers une valeur strictement positive implique l'existence d'une valeur d'adhérence strictement positive : c'est un cas particulier du critère de positivité 35.

Corollaire 41.Théorème ergodique *Si la chaîne de Markov est irréductible récurrente positive d'unique loi de probabilité invariante* μ, *on a pour toute fonction* f μ*-intégrable*

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in E}\frac{f(i)}{M_{i,i}} = \int f d\mu. \quad p.s.$$

DÉMONSTRATION. Si $f = 1_j$ le corollaire est la réécriture du théorème précédent. La propriété s'étend aux fonctions bornées par linéarité, puis aux fonctions intégrables par limite monotone. □

Ce corollaire s'exprime souvent en disant que la moyenne de f temporelle (c'est-à-dire sur une trajectoire X_n) est égale à la moyenne spatiale $\int f d\mu$. On peut aussi le voir comme une sorte de loi des grands nombres appliquée à la suite $f(X_n)$.