Martingales

Exercice 1. Modèle de Wright Fisher (voir TD)
On considère une population de taille **fixe** N dans laquelle chaque individu est de type A ou B (en génétique ce sont par exemple les deux allèles d'un même gène).
Soit X_n le nombre d'individus de la n-ième génération ayant le caractère A. Le modèle consiste à considérer que les individus de la $n+1$ème génération s'obtiennent en tirant avec remise N individus parmi les individus de la $n$ème génération : si on suppose qu'on a un seul parent, cela revient à dire que pour chaque individu de la $n+1$ème population, on tire au sort de manière indépendante son ancêtre parmi les individus de la $n$ième génération.
Selon ce modèle (simplifié) la loi de X_{n+1} sachant X_n est donc une loi binomiale $Bin(N, \frac{X_n}{N})$.
On suppose de plus que $X_0 = a$, fixé et connu.

(1) (Facultatif) Montrer que X_n est une martingale.

(2) Que peut-on dire de la convergence de X_n ? Quelle est la probabilité que le gène A finisse par disparaître ?

(3) Illustrer informatiquement le processus et le résultat de la question précédente.

(4) On modifie le modèle en introduisant la possibilité de mutations : avant le passage à la $n+1$ème génération, chaque individu a une probabilité de muter : les individus A ont une probabilité p_{AB} de devenir B, les individus B ont une probabilité p_{BA} de devenir A. Les mutations sont supposées indépendantes les unes des autres. On obtient alors une nouvelle répartition avec Y_n individus A; sachant Y_n, le nombre d'individus A à la $(n+1)$ème génération (avant mutation) sera alors binomial de paramètre $(d, \frac{Y_n}{d})$. Cette $(n+1)$ème génération mutera à son tour avant de donner naissance à la $(n+2)$ème. On suppose $0 < p_{AB} < 1$ et $0 < p_{BA} < 1$.

   (a) Expliquer pourquoi sachant X_n la loi de Y_n est la somme d'une loi binomiale de paramètre $(X_n, 1 - p_{AB})$ et d'une loi binomiale indépendante de la première de paramètre $(d - X_n, p_{BA})$.

   (b) Générer une trajectoire du processus et le représenter.

   (c) Observe-t-on une convergence presque sûre ?

   (d) (Facultatif) On peut montrer (cf cours ultérieur sur les chaînes de Markov) que X_n converge en loi. Illustrer la loi limite pour diverses valeurs de p_{AB} et p_{BA}.

Exercice 2. Faire l'urne de Polya (TP sur la convergence p.s.) si ce n'est pas déjà fait.

Exercice 3. Faire la marche de l'ivrogne si ce n'est pas déjà fait.

Exercice 4. Processus autorégressif (voir TD)
Les processus autorégressifs sont souvent utilisés en économie pour modéliser des évolutions de cours boursiers. Un exemple d'un tel processus est une suite (X_n) vérifiant $X_0 = a$ où $0 < a < 1$ est une constante et $X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta)\epsilon_{n+1}$, où $\theta \in]0, 1[$ est un paramètre fixé et où la loi de ϵ_{n+1} sachant F_n est une loi de Bernoulli de paramètre X_n.

(1) (Facultatif) Montrer que X_n est une martingale.

(2) Que peut-on dire de sa convergence ?

(3) Illustrer informatiquement et identifier la loi limite.

Exercice 5.Processus autorégressif II
Un autre exemple d'un tel processus est une suite (X_n) vérifiant $X_0 = a$ où $0 < a < 1$ est une constante et $X_{n+1} = \theta X_n + \epsilon_{n+1}$, où $\theta \in]0,1[$ est un paramètre fixé et où $(\epsilon)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. On dit que le processus est stable si $|\theta| < 1$, instable si $|\theta| = 1$, explosif si $|\theta| > 1$.

(1) Vérifier que $X_n = \theta^n a + \sum_{k=1}^n \theta^{n-k}\epsilon_k$. Quelle est la loi de X_n ?
(2) Simuler quelques trajectoires du processus, et expliquer ainsi les séparations entre les cas stables et instables.
(3) Il arrive souvent qu'on observe une réalisation (x_n) mais qu'on ne connaisse pas θ. On peut prendre alors comme estimateur de θ
$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2}$.
$\hat{\theta}_n$ vous semble-t-il être un estimateur convergent de θ ? (réponse numérique !)
(4) Si oui, a-t-on convergence en loi de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ vers une loi normale ? (réponse numérique !)

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. On pose $M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i X_{i+1}}{i}$.

(1) (Facultatif) Montrer que M_n est une martingale.
(2) On note $\Delta_n = M_{n+1} - M_n$. Rappeler pourquoi $E[M_{n+1}^2] - E[M_n^2] = E[\Delta_n^2]$.
(3) Vérifier que la série $\sum E[\Delta_n^2]$ converge.
(4) Justifier la convergence p.s. de M_n, et illustrer cette convergence.
(5) Obtenir une estimation de l'espérance et de la variance de la loi limite.
(6) La limite vous semble-t-elle suivre une loi normale ?

Exercice 7. (voir TD) On s'intéresse à l'argent dont dispose une compagnie d'assurance. On suppose qu'à l'instant initial elle dispose d'un fonds de 10000 euros, et qu'elle reçoit un montant P de primes chaque mois. Ainsi s'il n'y avait pas d'accident, son argent au bout de n mois serait $10000 + Pn$. Evidemment il y a de temps en temps des accidents : on suppose que la somme que la compagnie d'assurances doit payer chaque mois suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. L'argent dont dispose la compagnie d'assurance au bout de n mois est donc $A_n = 10000 + Pn - \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i suivent une loi normale.

(1) Commenter l'utilisation d'une loi normale.
(2) Déterminer $E[A_n]$. Conseilleriez-vous à la compagnie de prendre $P < \mu$?
(3) On s'intéresse maintenant à la probabilité p_0 que la compagnie soit ruinée en moins d'un an, c'est-à-dire que A devienne négatif.
   (a) On suppose $P = \mu$. Simuler le processus et donner une estimation de p_0.
   (b) La compagnie aimerait que p_0 soit inférieure à 0.05. En TD on a vu (ou pas...) que $p_0 \leq \exp(-20000 * (P - \mu)/\sigma^2)$. Quelle valeur de P lui suggéreriez-vous ? Faites l'illustration numérique correspondante.