Licence Mathématiques
Géométrie différentielle
Correction du DM2

Exercice 1

Si M est un extremum local de f sur V, alors il existe deux réels λ_1 et $lambda_2$ tels $df(x,y,z) = \lambda_1 dh_1(x,y,z) + \lambda_2 dh_2(x,y,z)$, donc les vecteurs $\nabla h_1(x,y,z)$, $\nabla h_2(x,y,z)$, $\nabla f(x,y,z)$ sont liés, donc $\det(\nabla h_1(x,y,z), \nabla h_2(x,y,z), \nabla f(x,y,z)) = 0$.

(1) On vérifie facilement que $g : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-1$ est une submersion lisse sur $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ donc S est bien une sous-variété de dimension 2.
Pour C, on considère $h : (x,y,z) \mapsto (x-\frac{1}{4})^2 + y^2 - \frac{1}{16}$. h est lisse et $dh(x,y,z)$ est non surjective ssi $2x - \frac{1}{2} = y = 0$. Or quel que soit le réel z, $(\frac{1}{4}, 0, z) \not{i}nC$. Donc si on définit l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^3\backslash\{(\frac{1}{4},0,z)\}$, $h|_\Omega$ est une submersion et $C = h|\Omega^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de dimension 2.
On considère enfin $k : (x,y,z) \mapsto (g(x,y,z), h(x,y,z))$. k est lisse et

$$\begin{aligned}
dk(x,y,z) \text{ non surjective} &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(dk(x,y,z) \neq 2) \\
&\Leftrightarrow \nabla g(x,y,z) \text{ et } \nabla h(x,y,z) \text{ sont liés} \\
&\Leftrightarrow 4xy - 4xy + y = 0 \text{ et } 2z(2x - \frac{1}{2}) = 0 \text{ et } 4zy = 0 \\
&\Leftrightarrow 4xy - 4xy + y = 0 \text{ et } 2z(2x - \frac{1}{2}) = 0 \text{ et } 4zy = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ et } (z = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Or $(x,0,0) \in V \Rightarrow x^2 = 1$ et $(x-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ donc c'est impossible.
Enfin, on a déjà vu que quel que soit z $(\frac{1}{4},0,z) \notin C$ et donc $(\frac{1}{4},0,z) \notin V$.

(2) S est fermée comme image réciproque d'un fermé $(\{0\})$ par l'application continue g, et bornée donc compacte.
C n'est pas borné car pour tout réel z $(0,0,z) \in C$ et $||(0,0,z)|| = |z|$. DOnc C n'est pas compact.
V est fermé comme image réciproque d'un fermé $(\{0\})$ par l'application continue k, et borné car inclus dans S donc compact.

(3) f est lisse et $df(x,y,z) = (1,1,4z)$.
(a) Les points critiques de f sur S vérifient $(1,1,4z)$ et $(2x,2y,2z)$ liés, donc $x = y$ et ($z = 0$ ou $x = \frac{1}{4}$).
Or $(x,x,0) \in S \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},z) \in S \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$
Il y a donc quatre points critiques de f sur S. S étant compacte, f admet un maximum et un minimum sur S, qui sont des points critiques.
On calcule
$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) = \sqrt{2}$
$f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0) = -\sqrt{2}$
$f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{9}{4}$
$f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{9}{4}$

Par conséquent le minimum de f sur S est $-\sqrt{2}$, atteint en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et le maximum est $\frac{9}{4}$, atteint en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}})$ et $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}})$.

(b) Pour tout réel z $(0,0,z) \in C$ et $f(0,0,z) = 2z^2$ donc f n'est pas majorée sur C et n'y admet donc pas de maximum.

(c) Les points critiques de f sur V vérifient $\det(\nabla h(x,y,z), \nabla h(x,y,z), \nabla f(x,y,z)) = 0$, soit
$(2x - \frac{1}{2})(8yz - 2z) - 2y(8xz - 2z) = 0$. On obtient donc $z = 0$ ou $x = \frac{1}{4}$.
Or $(x,y,0) \in V \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ et $(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$
Or les cercles de centre 0 de rayon 1 et de centre $(\frac{1}{4}, 0)$ de rayon $\frac{1}{4}$ ont une intersection vide.
$(\frac{1}{4}, y, z) \in V \Rightarrow y^2 = \frac{1}{16}$ et $\frac{1}{16} + y^2 + z^2 = 1$.
Donc $(\frac{1}{4}, y, z) \in V \Rightarrow y = \pm\frac{1}{4}$ et $z = \pm\sqrt{7}8$.
f admet donc 4 points critiques sur V; V étant compacte, f admet un maximum et un minimum sur V, qui sont des points critiques. On calcule
$f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{9}{4}$
$f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{9}{4}$
$f(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{7}{4}$
$f(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}}) = \frac{7}{4}$
Par conséquent le minimum de f sur V est $\frac{7}{4}$ et le maximum est $\frac{9}{4}$.

(4) Soit $t \in \mathbb{R}$. On vérifie aisément par le calcul que $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(t) \in C$ donc $\gamma(\mathbb{R}) \subset V \cap \{(x,y,z), z > 0\}$
Réciproquement, si $(x,y,z) \in \gamma(\mathbb{R})$ et si $z > 0$, $(x,y,z) \in C$ donc $16(x - \frac{1}{4})^2 + 16y^2 = 1$. Donc il existe un réel t tel que $4(x - \frac{1}{4}) = \cos(t)$ et $4y = \sin t$. Alors $(x,y,z) \in S$ donc $z^2 = \frac{7 - \cos t}{8}$. $z > 0$ on en déduit donc qu'il existe un réel t tel que $(x,y,z) = \gamma(t)$ et on a bien $V \cap \{(x,y,z), z > 0\} \subset \gamma(\mathbb{R})$.
Finalement $\gamma(\mathbb{R}) = V \cap \{(x,y,z), z > 0\}$

$f \circ \gamma(t) = \frac{1 + \cos(t) + \sin(t) + 7 - \cos(t)}{4} = 2 + \frac{\sin(t)}{4}$. Les extrema de $f \circ \gamma$ sur $\mathbb{R}$ sont donc $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ atteint en $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (correspondant à $\gamma(t) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}})$ et $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ atteint en $t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (correspondant à $\gamma(t) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}})$. On retrouve bien les extrema de f sur V qui vérifient $z > 0$. Par symétrie $z \mapsto -z$, on obtient bien les extrema de f sur V.

Exercice 2

(1) $S = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2\}$. $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - (1 + z^2)^2$ est lisse et $df(x,y,z) = (2x, 2y, 4z(1 + z^2)$ est surjective sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Or $(0,0,0) \not{i}nS$. S est donc bien une sousvariété de dimension 2.

(2) Un calcul immédiat donne $\phi([0, 2\pi] \times \mathbb{R}) \subset S$. Réciproquement, si $(x,y,z) \in S$, $x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2$ donc il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $x = (1 + z^2)\cos\theta$ et $y = (1 + z^2)\sin\theta$.
En notant $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et $u'_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ et $k = (0,0,1)$, (u_θ, u'_θ, k) est une base orthonormée directe et $\phi(\theta, z) = (1 + z^2)u_\theta + zk$ donc

$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(\theta,z) = (1+z^2)u'_\theta$ et
$\frac{\partial\phi}{\partial z}(\theta,z) = (2z)u_\theta + k$.
Donc $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(\theta,z)\wedge\frac{\partial\phi}{\partial z}(\theta,z) = -2z(1+z^2)k + (1+z^2)u_\theta \neq 0$ donc ϕ est bien une immersion.

(3) On obtient $||\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(\theta,z)||^2 = (1+z^2)^2$ et $||\frac{\partial\phi}{\partial z}(\theta,z)||^2 = 1+4z^2$; de plus ces deux vecteurs sont orthogonaux donc la première forme fondamentale est
$\alpha_\phi(\theta,z) = \begin{pmatrix} (1+z^2)^2 & 0 \\ 0 & 1+4z^2 \end{pmatrix}$

(4) L'aire de $\phi(]0,2\pi[\times]-\ln(2),\ln(2)[$ est
$\int_0^{2\pi}(\int_{-\ln 2}^{\ln(2)}\sqrt{\det(\alpha)}dz)d\theta = 2\pi(\int_{-\ln 2}^{\ln(2)}(1+z^2)\sqrt{(1+4z^2)}dz)$. En faisant le changement de variable $2z = \sinh(u)$ on obtient
Aire $= 2\pi(\int_{-a}^{a}(1+(\cosh(u)^2-1)/4)\cosh(u)\cosh(u)du) = 2\pi(\int_{-a}^{a}(3\cosh(u)^2/4+\cosh(u)^4/4)du)$. où $a = \text{argsh}(2\ln(2))$. En revenant sous forme exponentielle on obtient finalement
Aire $= 2\pi[\frac{3e^{2u}-3e^{-2u}+12u}{32} + \frac{e^{4u}+e^{-4u}+4e^{2u}+4e^{-2u}+6}{64}]_{-a}^{a}$.

(5) La trajectoire est un cercle. On a $(\theta',z') = (2\pi,0)$. Donc la longueur est
$\int_0^1\sqrt{2\pi(1+z_0^2)^2(2\pi)}dt = 2\pi(1+z_0^2)^2$ ce qui correspond bien au périmètre d'un cercle de rayon $(1+z_0^2)^2$

(6) On a $(\theta',z') = (1,2\sqrt{3}\exp(2\sqrt{3}t))$. Donc
$\alpha(\theta(t),z(t))(\theta'(t),z'(t)) = ((1+\exp(4\sqrt{3}t))^2,(1+4\exp(4\sqrt{3}t))2\sqrt{3}\exp(2\sqrt{3}t))$.
Le facteur à intégrer est donc
$\sqrt{((1+\exp(4\sqrt{3}t))^2+(1+4\exp(4\sqrt{3}t))12\exp(4\sqrt{3}t))} = \sqrt{(1+7\exp(4\sqrt{3}t))^2}$.
Finalement la longueur est
$\int_0^1(1+7\exp(4\sqrt{3}t))dt = 1+\frac{7}{4\sqrt{3}}(\exp(4\sqrt{3})-1)$.