ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/2010

Licence de Mathématiques

Devoir Surveillé de Géométrie Différentielle
Date : 11/03/2010 **Heure : 11h** **Durée : 1h30**

Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.

Les deux exercices sont indépendants, ils peuvent être donc fait dans l'ordre de son choix. On désigne par $\langle .\,,.\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^3$ et par $\|.\|$ la norme qui lui est associée.

Exercice 1

Soit $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ c'est-à-dire $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$. Soit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2$.

1) Montrer que $\mathbf{S}^2$ est une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^3$.
2) Montrer que pour tout $c \in \mathbf{R}$, $N_c = F^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ (dont on précisera la dimension) ou un ensemble vide. Dessiner N_0 et $N_{\frac{1}{4}}$.
3) Déterminer les points critiques de la restriction de F à $\mathbf{S}^2$, que l'on notera $F_{|\mathbf{S}^2}$. En déduire le maximum et le minimum de $F_{|\mathbf{S}^2}$.
4) Montrer que $(\mathbf{S}^2 \cap N_{\frac{1}{4}}) \setminus \{(1,0,0)\}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$.
5) En utilisant les coordonnées cylindriques $(r,u) \mapsto (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos u, \frac{1}{2}\sin u, r)$ de $N_{\frac{1}{4}}$, trouver un arc paramétré lisse régulier (I, γ) tel que $\gamma(I) = \mathbf{S}^2 \cap N_{\frac{1}{4}}$.
6) Montrer que $\mathbf{S}^2 \cap N_{\frac{1}{4}}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 2

Préambule : Soient A et B deux arcs géométriques lisses. On note (τ_A, ν_A, β_A) et (τ_B, ν_B, β_B) leurs trièdres de Frenet, définis en les points biréguliers de ces arcs.

On dit que A est une *courbe de Bertrand* et que B est un *compagnon* de A lorsque :
A est birégulier et de torsion partout non nulle, il existe (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A et (I, g) un paramétrage de B (pas forcément par longueur d'arc) ainsi qu'une fonction dérivable r, non nulle, de I dans $\mathbf{R}$ tels que pour tout $t \in I$:

i) $g(t) = f(t) + r(t)\nu_A(f(t))$,
ii) si $g(t)$ est un point régulier de B, alors $\nu_A(f(t))$ et $\tau_B(g(t))$ sont perpendiculaires,
iii) si $g(t)$ est un point birégulier de B, alors $\nu_A(f(t)) = \pm\nu_B(g(t))$.

1) Soient a et b deux réels non nuls et H l'hélice circulaire paramétrée par $f_H(t) = (a\cos(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), a\sin(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), b\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}})$.
   (a) Déterminer les repères de Frenet de H.
   (b) Quel est la nature de l'arc paramétré par $g_H(t) = f_H(t) + r\,\nu_H(f(t))$, où r est une *constante* non nulle.

(c) En déduire que H est une courbe de Bertrand. L'arc obtenu pour $r = a$ est-il un compagnon de H ?

Dorénavant A est une courbe de Bertrand, B un compagnon de A, (I, f), (I, g) et r sont comme dans le préambule.

2) Montrer que B est régulière, en déduire qu'il existe un difféomorphisme ϕ d'un intervalle J dans I tel que $h = g \circ \phi$ est un paramétrage par longueur d'arc de B.

3) Montrer que la fonction r est constante.

4) Exprimer dans le repère $\big(\tau_B(g(t)), \nu_B(g(t)), \beta_B(g(t))\big)$, la dérivée de l'application définie sur I par $t \mapsto \tau_B(g(t))$ (on pourra faire intervenir ϕ). En déduire que les applications $t \mapsto \langle \tau_A(f(t)), \tau_B(g(t)) \rangle$ et $t \mapsto \| \tau_A(f(t)) \wedge \tau_B(g(t)) \|$ sont constantes.

5) Exprimer $\dfrac{\langle \tau_A(f(t)), \tau_B(g(t)) \rangle}{\| \tau_A(f(t)) \wedge \tau_B(g(t)) \|}$ en fonction de la courbure K_A et de la torsion T_A de A. En déduire qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $r\, K_A + c\, T_A = 1$.

6) Réciproquement, soient C un arc birégulier dont la torsion ne s'annule pas, $r \neq 0$ et c deux réels tels que $r\, K_C + c\, T_C = 1$. Montrer que C est une courbe de Bertrand.