TP noté 2011

M'envoyer TOUS les fichiers nécessaires par mail à la fin du TP du 2 décembre et me rendre les calculs sur papier.
Mon mail : chabanol@math.u-bordeaux1.fr
Les questions "N" demandent une réponse numérique, les questions "T" une réponse théorique.

Vous pouvez mettre des commentaires dans un fichier matlab en commençant une ligne par %; essayez de séparer les réponses numériques aux différentes questions par une ligne débutant par %%
Rappel : en anglais, "fonction de répartition" se dit "distribution function" ou parfois "cumulative probability function" pour des v.a. discrètes.

`Exercice 1.`

(1) (N) On note f la fonction définie sur $[0, \sqrt{2}]$ par $\forall x \in [0, \sqrt{2}], f(x) = x^3$, et A la partie du plan définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Déterminer un pavé B de $\mathbb{R}^2$ $B = [0, \sqrt{2}] \times [a, b]$ tel que $A \subset B$, puis générer par la méthode du rejet un échantillon de points de loi uniforme sur A.

(2) (TN) Quelle est la loi de l'abscisse X d'un point aléatoire (X, Y) de loi uniforme sur A ? Exprimer sa densité en fonction de f. Déterminer sa fonction de répartition théorique et comparer à la fonction de répartition empirique.

(3) (N) Proposer un autre algorithme pour simuler une variable aléatoire de même loi que X.

`Exercice 2` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(1) (T) Déterminer la fonction de répartition de $m_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

(2) (T) Montrer que $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(m_n > \epsilon) = 0$.

(3) (T) Si ω est fixé, la suite $(m_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

(4) (T) Justifier que m_n converge p.s et donner sa limite.

(5) (T) Déterminer la fonction de répartition de $Y_n = nm_n$; en déduire que Y_n converge en loi et préciser la loi limite.

(6) (N) Illustrer numériquement les convergences démontrées ci-dessus.

`Exercice 3`

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence aléatoire $F = \frac{S}{n}$ où S suit une loi binomiale de paramètres (n, p) (supposés connus) est défini dans le programme de 1ère comme l'intervalle (déterministe) $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$ où :

- a est le plus grand entier tel que $P(S < a) \leq 0.025$
- b est le plus petit entier tel que $P(S > b) \leq 0.025$

(1) (T) Que peut-on dire de $P(F \in [\frac{a}{n}, \frac{b}{n}])$?

(2) (N) Ecrire une fonction qui prend en paramètres n et p et fournit $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$.

(3) (T) On peut également définir un intervalle asymptotique de fluctuation sous la forme $[p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$. Justifier cette formule.

(4) (N) Comparer ces deux intervalles de fluctuation pour différentes valeurs de n et p : on pourra à p fixé représenter les deux intervalles en fonction de n, et vice-versa, à n fixé les représenter en fonction de p.

(5) L'intervalle de fluctuation peut servir à prendre une décision : on fait l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère dans une population est p. Si la fréquence observée n'est pas dans l'intervalle de fluctuation, on rejettera alors l'hypothèse. Sinon, on l'accepte. Utiliser votre fonction précédente pour répondre aux problèmes suivants :
   (a) (NT) Monsieur Shadock affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard, 43 déclarent lui faire confiance. Peut-on considérer au seuil 0.95 l'affirmation de M. Shadock comme exacte ?
   (b) (NT) Zorro se retrouve condamné. Dans la population, 80% des gens sont d'origine mexicaine, or sur les 870 personnes convoquées pour être dans le jury il n'y avait que 339 mexicains. L'avocat de Zorro déclare qu'il y a eu discrimination. Qu'en pensez-vous ?

`Exercice 4`

Un ivrogne se déplace à chaque pas de temps de façon aléatoire d'un pas vers la gauche ou vers la droite; les déplacements successifs sont indépendants les uns des autres, et on note $P(Droite) = p$. Le bar dont il est sorti à l'instant 0 est à l'abscisse 0 (l'unité pour les abscisses est la longueur d'un pas).

(1) (N) Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle prenne en paramètre la position X de l'ivrogne à un pas de temps et simule la position de l'ivrogne au pas suivant.
```
function Y = Ivrogne( X,p)
U=rand(1);
if (...) Y=X+1;
else
...
end
```
(2) (N) Simuler une trajectoire $X_1, \ldots, X_{100}$ de l'ivrogne et tracer X_n en fonction de n.
(3) La maison de l'ivrogne est à l'abscisse $-a$, et à l'abscisse b il y a la Garonne (a et b sont deux entiers positifs fixés). On cherche la probabilité P_1 que l'ivrogne finisse sans encombre chez lui (sans être tombé dans la Garonne).
   (a) (N) Effectuer une simulation jusqu'à pouvoir décider si l'ivrogne finit dans la Garonne ou dans son lit et donner le temps pendant lequel l'ivrogne a marché.
   (b) (N) Estimer la probabilité P_1 pour différentes valeurs de a, b et p.
   (c) (N) Obtenir un intervalle de confiance asymptotique au niveau 0.90 pour cette probabilité dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $a = 2$, $b = 3$.
   (d) (N) Estimer l'espérance du temps pendant lequel l'ivrogne marche avant de se retrouver soit dans la Garonne soit dans son lit pour différentes valeurs des paramètres.
   (e) (T) Expliquer comment on peut modéliser le problème par une chaîne de Markov; donner son graphe, classer les états et dire quelles sont les classes récurrentes et transitoires.
   (f) (N) Ecrire (dans matlab) une fonction qui fournit sa matrice de transition en fonction de p dans le cas $a = 2$ et $b = 3$.
   (g) (TN) Déterminer la probabilité exacte que l'ivrogne finisse dans son lit dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $a = 2$, $b = 3$; la vraie valeur est-elle dans l'intervalle de confiance de la question c ?
   (h) (NT) Recommencer la question c et obtenir ainsi 20 intervalles de confiance toujours dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $a = 2$, $b = 3$; combien d'entre eux comportent la vraie valeur ? Ce nombre est aléatoire; quelle est sa loi ?