Correction du devoir surveillé de probabilités (mars 2008) **M.-L. Chabanol**

<u>Problème 1</u>. (Application directe du cours)
Rappels : X suit une loi géométrique de paramètre p ssi $\forall k > 0, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. X suit une loi exponentielle de paramètre λ ssi X a pour densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbf{R}^+}(x)$.

1. *Énoncer le lemme de Borel-Cantelli.*
   Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilités, et A_n une suite d'événements de $\mathcal{T}$. Alors :
   – Si la série $\sum P(A_n)$ converge, $P(\text{limsup } A_n) = 0$.
   – Si les A_n sont indépendants et si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors $P(\text{limsup } A_n) = 1$
2. *Donner la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, ainsi que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (la démonstration n'est pas nécessaire).*
   Si X suit une loi géométrique de paramètre p, $E[e^{itX}] = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.
   Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, $E[e^{itX}] = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
3. *Soit X_n une suite de variables aléatoires suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{\mu}{n}$. Calculer la fonction caractéristique de $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Montrer que Y_n converge en loi et donner sa loi limite.*
   $E[e^{itY_n}] = E[e^{\frac{it}{n}X_n}] = \frac{\mu e^{i\frac{t}{n}}}{n-(n-\mu)e^{i\frac{t}{n}}} = \frac{\mu(1+o(1))}{\mu - it + o(1)}$. Donc quand n tend vers $+\infty$, la fonction caractéristique de Y_n converge vers la fonction caractéristique d'une loi exponentielle de paramètre μ : Y_n converge donc en loi vers une loi exponentielle de paramètre μ.

<u>Problème 2</u>. *On s'intéresse à des familles qui auront deux enfants. On suppose qu'à chaque naissance, les parents choisissent le prénom de leur enfant au hasard uniformément dans l'un des deux ensembles de prénoms $\Omega_1 = \{\text{prénoms masculins}\}$ et $\Omega_2 = \{\text{prénoms féminins}\}$. On suppose de plus que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (ils n'envisagent pas d'appeler leur enfant Claude ou Dominique, par exemple). Les naissances sont supposées indépendantes, et les sexes équiprobables. Enfin, après chaque naissance, ils rayent le prénom choisi de l'ensemble des prénoms disponibles (de telle sorte que deux enfants d'une même famille n'ont pas le même prénom). Avant leur premier enfant, $Card(\Omega_1) = N$ et $Card(\Omega_2) = M$. On suppose $N \geq 2$ et $M \geq 2$.*

1. *Soit p un prénom de garçon de Ω_1. Calculer la probabilité que le premier enfant s'appelle p.*
   La probabilité cherchée est P(garçon)P(prénom=p|garçon)+P(fille)P(prénom = p|fille)
   =P(garçon)P(prénom=p|garçon), soit $\frac{1}{2}\frac{1}{N}$.
2. *Calculer de même la probabilité que le premier enfant s'appelle p si p est un prénom de fille de Ω_2.*
   De même, si p est un prénom de fille, la probabilité que le premier enfant s'appelle p est $\frac{1}{2M}$.
3. *Soient (r, s) deux prénoms différents. Calculer la probabilité que le premier enfant s'appelle r et le deuxième s'appelle s.*
   Remarque : comme dans la question précédente, les prénoms r et s sont fixés, et pas aléatoires. Mais la probabilité cherchée dépend de s'ils sont dans Ω_1 ou dans Ω_2. Il faut distinguer 3 cas :
   – Si r et s sont deux prénoms de garçons, la probabilité cherchée est
     P(prénoms=(r,s)|2 garçons)P(2 garçons), puisque les autres probabilités conditionnelles sont nulles. On trouve donc $\frac{1}{4N(N-1)}$.
   – De même, si r et s sont deux prénoms de filles, la probabilité cherchée est $\frac{1}{4M(M-1)}$.
   – Si p est un prénom de garçon et s un prénom de fille, ou vice versa, la probabilité cherchée est $\frac{1}{4MN}$.
4. *On suppose que "Léa" est un prénom de Ω_2. Quelle est la probabilité qu'un enfant s'appelle "Léa" ?*
   La probabilité que le deuxième enfant s'appelle Léa est
   $\sum_{p \in (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus \{\text{Lea}\}} P(p, \text{Lea}) = \sum_{p \in \Omega_1} \frac{1}{4MN} + \sum_{p \in \Omega_2 \setminus \text{Lea}} \frac{1}{4M(M-1)} = \frac{1}{2M}$ (c'est la même que la probabilité que le premier enfant s'appelle Léa). Donc la probabilité qu'un enfant s'appelle Léa est $\frac{1}{M}$.
5. *Votre voisin a deux enfants. Vous apprenez que l'un d'eux s'appelle Léa. Quelle est la probabilité qu'il ait deux filles ?*
   P(deux filles |Léa) = P(deux filles dont une s'appelle Léa)/P(Léa). Or P(deux filles dont une s'appelle Léa) $= 2\sum_{s \in \Omega_2 \setminus \{Lea\}} \frac{1}{4M(M-1)} = \frac{1}{2M}$. Donc finalement la probabilité qu'il ait deux filles

si on sait que l'un de ses enfants s'appelle Léa est $\frac{1}{2}$ (ce qui est différent de la probabilité qu'il ait deux filles si on sait que l'un de ses enfants est une fille, qui est de $\frac{1}{3}$...).

<u>PROBLÈME 3</u>. *Les deux parties sont indépendantes.*

Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé fixé et $(X_1, \ldots, X_k, \ldots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles de même loi vérifiant $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. *On suppose dans cette partie $p \neq \frac{1}{2}$.*
   (a) *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $P(S_n = 0)$.*
   Si n est impair, $P(S_n = 0) = 0$. Si $n = 2k$, c'est la probabilité que k X_i soit égaux à 1, et k égaux à -1. Il y a $\binom{2k}{k}$ possibilités, chacune de probabilité $p^k(1-p)^k$, d'où
   $P(S_{2k} = 0) = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p(1-p)^k$.
   (b) *Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} P(S_n = 0)$ converge. (On rappelle la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.) Quelle est la probabilité que S_n s'annule une infinité de fois ?*
   D'après la formule de Stirling, $P(S_{2k} = 0) \sim_\infty \frac{\sqrt{4\pi k}}{2\pi k} \frac{(2k)^{2k} p^k (1-p)^k}{k^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}(4p(1-p))^k$. Or si $p \in [0,1]$ est différent de $\frac{1}{2}$, $|4p(1-p)| < 1$. Donc la série de terme général $(4p(1-p))^k$ converge. D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, puisque $0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi k}}(4p(1-p))^k \leq (4p(1-p))^k$, la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{\pi k}}(4p(1-p))^k$ converge également, ainsi donc que la série de terme général $P(S_n = 0)$.
   D'après le lemme de Borel Cantelli, si on note A_n l'événement $S_n = 0$, on a $P(\text{ limsup} A_n) = 0$. Ainsi la probabilité que S_n s'annule une infinité de fois est nulle.
2. *On suppose à partir de maintenant $p = \frac{1}{2}$.*
   (a) *Vérifier $\forall t \in \mathbf{R}, E[e^{tX_n}] = cosh(t)$.*
   $E[e^{tX_n}] = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t)$.
   (b) *En déduire $\forall t \in \mathbf{R}, E[e^{tX_n}] \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. (On pourra par exemple utiliser un développement en série de Taylor des deux membres de l'inégalité.)*
   On a $\forall t \in \mathbf{R}$, $\cosh(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$. Il suffit donc pour obtenir l'inégalité voulue de vérifier pour tout $n \geq 0$ $2^n n! \leq (2n)!$. On peut le démontrer aisément par récurrence, ou remarquer $(2n)! = n! \prod_{i=n+1}^{2n}(i)$. Il y a n termes dans le produit, qui sont tous supérieurs à 2 si $n \geq 1$. Si $n = 0$, on vérifie aisément l'inégalité.
   Remarque : on a besoin de tout le développement de la série. A partir d'un développement limité, on n'obtient qu'une inégalité valide au voisinage de 0.
   (c) *Montrer que pour tous $a > 0, n \geq 1$ et $u > 0$ on a $P(S_n > a) \leq e^{\frac{nu^2}{2} - ua}$ (on pourra majorer $P(e^{uS_n} > e^{ua})$ en utilisant une inégalité de Markov...).*
   La fonction exp étant strictement croissante, et u étant strictement positif, $P(S_n > a) = P(e^{uS_n} > e^{ua})$. D'après l'inégalité de Markov, (e^{uS_n} est bornée par e^{un}, donc intégrable), $P(e^{uS_n} > e^{ua}) \leq \frac{E[e^{uS_n}]}{e^{ua}}$. Or, puisque les X_i sont indépendantes, $E[e^{uS_n}] = E[e^{uX_1}]^n = \cosh(u)^n$. En utilisant la question précédente, on obtient bien pour tout réel u $P(S_n > a) \leq e^{\frac{nu^2}{2} - ua}$.
   (d) *En déduire $P(S_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$, puis $P(|S_n| > a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.*
   On va choisir u de façon à minimiser $e^{\frac{nu^2}{2} - ua}$. Il faut donc minimiser $nu^2 - 2ua$, c'est-à-dire choisir $u = \frac{a}{n}$. On obtient alors $P(S_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
   Enfin, $P(|S_n| > a) = P(S_n > a) + P(S_n < -a)$. Mais X_i et $-X_i$ ont même loi, donc S_n et $-S_n$ ont même loi, donc $P(S_n < -a) = P(-S_n < -a) = P(S_n > a)$. FInalement, $P(|S_n| > a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
   (e) *Soit $c > 1$. <u>Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour montrer que avec probabilité 1</u>, $S_n \leq c\sqrt{2n \ln n}$ pour tout n sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.*
   On note A_n l'événement $\{S_n > c\sqrt{2n \ln n}\}$. On a donc $P(A_n) \leq e^{-c^2 \ln n}$, soit $P(A_n) \leq n^{-c^2}$. La série de terme général n^{-c^2} converge puisque $c > 1$; par conséquent, d'après le lemme de Borel Cantelli, la probabilité qu'une infinité de A_n <u>se produise</u> est nulle. Remarque : on ne peut rien déduire de la divergence de $\sum P(S_n \leq c\sqrt{2n \ln n}\}$, puisque les événements ne sont pas indépendants.

Problème 4. *On suppose que sur une voie d'autoroute, toutes les voitures ont la même vitesse (qu'on prendra égale à 1), et sont séparées par des distances $L_1, L_2, \dots L_n, \dots$ comptées de l'arrière du véhicule de devant (numéro $n-1$) à l'avant du véhicule de derrière (numéro n). On considère que le conducteur de la voiture j a un temps de réaction R_j, et que son véhicule a une distance de freinage (avant immobilisation) D_j : ainsi, à partir du moment où le véhicule qui le précède commence à freiner, il parcourt une distance de $R_j + D_j$ avant de s'arrêter. On suppose que les L_i sont toutes distribuées selon une loi de densité l sur $\mathbf{R}^+$, que les R_j suivent toutes une loi de densité r sur $\mathbf{R}^+$, et les D_j suivent une loi de densité d sur $\mathbf{R}^+$. On suppose de plus que toutes ces variables sont indépendantes. On suppose (encore...) que à l'instant 0, le véhicule numéro 0 s'arrête instantanément (donc $D_0 = R_0 = 0$), et on cherche la probabilité qu'il y ait un accident. On considère pour cela qu'il ne peut y avoir d'accident qu'entre un véhicule à l'arrêt et un véhicule en mouvement, et qu'un conducteur qui voit le véhicule qui le précède freiner se mettra aussi à freiner le plus tôt possible (c'est-à-dire après son temps de réaction R_j).*

1. *Montrer que la probabilité pour que le véhicule 1 s'arrête sans collision est*

$$\int\int\int_{\{x+y<z\}} r(x)d(y)l(z)dxdydz$$

   Le véhicule 1 a besoin d'une distance de $R_1 + D_1$ pour s'arrêter. R_1, D_1 et L_1 étant indépendantes, la densité du triplet est le produit des densités, donc
   P(1 s'arrête sans collision) $= P(R_1 + D_1 < L_1) = \int\int\int_{\{x+y<z\}} r(x)d(y)l(z)dxdydz$.

2. *Calculer cette probabilité si les R_i suivent toutes une loi uniforme sur $[r_1, r_2]$, les D_i une loi uniforme sur $[d_1, d_2]$ et les L_i une loi exponentielle de paramètre λ.*
   Toutes les fonctions étant mesurables positives, on peut appliquer Fubini-Tonelli et obtenir
   $\int\int\int_{\{x+y<z\}} r(x)d(y)l(z)dxdydz = \frac{1}{(r2-r_1)(d_2-d_1)} \int_{r_1}^{r_2}(\int_{d_1}^{d_2}(\int_{x+y}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z}dz)dy)dx$
   $= \frac{1}{(r2-r_1)(d_2-d_1)} \int_{r_1}^{r_2}(\int_{d_1}^{d_2} e^{-\lambda(y+x)}dy)dx = \frac{(e^{-\lambda r_1}-e^{-\lambda r_2})(e^{-\lambda d_1}-e^{-\lambda d_2})}{\lambda^2(r2-r_1)(d_2-d_1)}$.

3. *On note pour $n \geq 1$, A_n l'événement "Les véhicules de 1 à n se sont arrêtés sans collision", $B_1 = \{R_1 + D_1 < L_1\}$, et $B_n = \{R_n + D_n < L_n + D_{n-1}\}$ si $n > 1$. Justifier $A_n = \cap_{k=1}^n B_k$.*
   On fonctionne par récurrence. On a déjà vu que $B_1 = A_1$. On suppose que $A_n = \cap_{k=1}^n B_k$. On a de toute évidence $A_{n+1} \subset A_n$. De plus, si les n premiers véhicules s'arrêtent sans collision, à partir du moment où la n-ième freine, celle-ci va encore avancer de D_n jusquà l'arrêt, et celle de derrière de $R_{n+1}+D_{n+1}$. Elle ne rentrera pas dans celle de devant si et seulement si $R_{n+1}+D_{n+1} < L_{n+1}+D_n$. Ainsi, $A_{n+1} = \cap_{k=1}^n B_k$. On a donc bien $A_n = \cap_{k=1}^n B_k$.

4. *Dans le cas où les D_n sont déterministes égaux à d_0 (c'est-à-dire $P(D_n = d_0) = 1$), exprimer $P(A_n)$ en fonction de l et r. Montrer que s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_\alpha^{+\infty} r(x)dx > 0$ et $\int_0^\alpha l(x)dx > 0$, alors $P(\cap_{k=1}^\infty B_k) = 0$. Que peut-on en déduire sur la probabilité qu'il y ait un accident ? (On suppose qu'il y a une infinité de voitures.)*
   On a alors $B_1 = \{R_1 + d_0 < L_1\}$, et si $n > 1$, $B_n = \{R_n + d_0 < L_n + d_0\} = \{R_n < L_n\}$. Les B_i sont donc indépendants (remarque : si les D_n sont aléatoires, ce n'est a priori pas le cas), et $P(A_n) = \prod_{k=1}^n P(B_k) = P(R_1+d_0 < L_1)(P(R_1 < L_1))^{n-1} = (\int\int_{x+d_0<y} r(x)l(y)dxdy)(\int\int_{x<y} r(x)l(y)dxdy)^{n-1}$.
   On suppose maintenant qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_\alpha^{+\infty} r(x)dx > 0$ et $\int_0^\alpha l(x)dx > 0$. Alors $P(R_1 \geq L_1) \geq P(R_1 \geq \alpha \text{ et } L_1 \leq \alpha)$, donc $P(R_1 \geq L_1) > \int_\alpha^{+\infty} r(x)dx \int_0^\alpha l(x)dx > 0$. Par conséquent, $0 \leq P(R_1 < L_1) < 1$, et donc $\lim_{n\to\infty} P(R_1 < L_1)^{n-1} = 0$. Or pour tout $n > 0$, $P(\cap_{k=1}^\infty B_k) \leq P(\cap_{k=1}^n B_k) \leq P(R_1 < L_1)^{n-1}$. Par conséquent, $P(\cap_{k=1}^\infty B_k) = 0$, et la probabilité qu'il y ait un accident est donc 1.

5. *On suppose dans cette question que les $D_n, n \geq 1$ sont déterministes, tous égaux à d_0, que les R_i suivent une loi uniforme sur $[r_1, r_2]$ et les L_i suivent une loi exponentielle de paramètre 1.*
   (a) *Calculer $P(A_n)$.*
   $\int\int_{x+d_0<y} r(x)l(y)dxdy = \frac{1}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}(\int_{x+d_0}^{+\infty} e^{-y}dy) = \frac{1}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2} e^{-x-d_0} = e^{-d_0}\frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1}$, et de même, $\int\int_{x<y} r(x)l(y)dxdy = \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1}$. Donc $P(A_n) = e^{-d_0}(\frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1})^n$.
   (b) *Montrer que s'il y a une infinité de voitures, il y aura presque sûrement un accident.* Soit $r_0 \in]r_1, r_2[$. On a $P(R > r_0) > 0$ et $P(L < r_0) > 0$. D'après la question 3, il y a donc presque

sûrement un accident. (On aurait aussi pu vérifier en utilisant le théorème des accroissements finis $0 \leq \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1} < 1$ pour justifier $\lim_n P(A_n) = 0$)

(c) *On note N le numéro du premier véhicule qui rentre dans son voisin de devant (d'après la question précédente, N est presque sûrement fini). Donner la loi de N.*
$P(N = 1) = 1 - P(A_1) = 1 - e^{-d_0 \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1}}$.
Si $n > 1$, $P(N = n) = P(A_{n-1}) - P(A_n) = e^{-d_0}(\frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1})^{n-1}(1 - \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1})$. Le fait que B_1 joue un rôle particulier fait que N ne suit pas tout-à-fait une loi géométrique.

(d) *On pose $a = e^{-d_0}$ et $p = 1 - \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1}$. On note $U = p(N - 1)$.*

i. *Calculer la fonction caractéristique de N.*
$E[e^{itN}] = \sum_{n\geq 1} e^{itn} P(N = n) =$
$(1 - e^{-d_0 \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1}})e^{it} + \sum_{n\geq 2} e^{itn} e^{-d_0}(\frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1})^{n-1}(1 - \frac{e^{-r_1}-e^{-r_2}}{r_2-r_1})$
$= e^{it}(1 - a(1 - p)) + ap\frac{e^{2it}(1-p)}{1-e^{it}(1-p)}$.

ii. *Montrer que lorsque p tend vers 0, U converge en loi vers une variable de loi $(1 - a)\delta_0 + ae^{-x}1_{\mathbf{R}^+}(x)dx$.*
La fonction caractéristique de U est donc
$E[e^{itp(N-1)}] = e^{-itp}E[e^{itpN}] = 1 - a(1 - p) + ap\frac{e^{itp}(1-p)}{1-e^{itp}(1-p)}$. Lorsque p tend vers 0, la fonction caractéristique de U converge donc vers $1 - a + \frac{a}{1-it}$. Or si X suit une loi $(1 - a)\delta_0 + ae^{-x}1_{\mathbf{R}^+}(x)dx$, $E[e^{itx}] = (1 - a) + a\int_0^{+\infty} e^{-x+itx} = 1 - a + \frac{a}{1-it}$. Donc U converge en loi vers une variable de loi $(1 - a)\delta_0 + ae^{-x}1_{\mathbf{R}^+}(x)dx$.

6. *Les D_n ne sont plus supposées déterministes. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(D_n > n\epsilon) = 0$. Que peut-on en déduire pour la variable $\frac{D_n}{n}$?*
$P(D_n > n\epsilon) = P(D_1 > n\epsilon)$. Or la suite d'événements $\{D_1 > n\epsilon\}$ est décroissante, donc $\lim_{n\to+\infty} P(D_n > n\epsilon) = P(\cap_n(D_n > n\epsilon)) = P(\emptyset) = 0$. Remarque : l'inégalité de Markov fournit aussi une démonstration, valide uniquement si les D_n sont intégrables.
On a donc pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{D_n}{n}| > \epsilon) = 0$. Donc $\frac{D_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.

7. *On suppose que les R_i et les L_i sont intégrables d'espérance respectivement ρ et λ. On note $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n R_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L_i + \frac{D_n}{n}$. Que peut-on dire sur la convergence de la suite de variables aléatoires Y_n ?*
Les R_i sont indépendantes identiquement distribuées et intégrables : d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$ converge donc presque sûrement vers ρ, et donc également en probabilité. De même, les L_i sont indépendantes identiquement distribuées et intégrables : d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n}$ converge donc presque sûrement, et a fortiori en probabilité, vers λ. On a vu que $\frac{D_n}{n}$ converge en probabilité vers 0. Donc Y_n converge en probabilité vers $\rho - \lambda$. Si on applique juste la loi faible des grands nombres, on trouve simplement des convergences en loi, et on a bien le droit de les ajouter car ce sont des convergences vers des constantes (d'autre part on sait aussi que la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité).

8. *On dit qu'un véhicule n est en état de risque si $\sum_{i=1}^n R_i + D_n - \sum_{i=1}^n L_i > 0$. On suppose $\rho < \lambda$.*

(a) *On note $C_n = \{\sum_{i=1}^n R_i + D_n - \sum_{i=1}^n L_i > 0\}$. Vérifier que C_n est inclus dans le complémentaire de A_n.*
On suppose que A_n se produit, c'est -à-dire que tous les B_n se produisent. En sommant toutes les inégalités, on obtient alors $\sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^n D_i < \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=2}^n D_{i-1}$, soit $\sum_{i=1}^n R_i + D_n - \sum_{i=1}^n L_i < 0$. Donc A_n est inclus dans le complémentaire de C_n, et C_n est donc inclus dans le complémentaire de A_n. Ainsi, si C_n se produit, un accident de produira.

(b) *Montrer $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 0$. En déduire que presque sûrement, il existe un véhicule qui n'est pas en état de risque.*
$P(C_n) = P(Y_n > 0)$. Or Y_n converge en probabilité vers $\rho - \lambda < 0$. Soit $\epsilon = -\rho + \lambda$. Alors $P(Y_n > 0) = P(Y_n - (\rho - \lambda) > -\rho + \lambda) \leq P(|Y_n - (\rho - \lambda)| > \epsilon)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut aussi utiliser la convergence en loi. $P(Y_n > 0) = 1 - F_{Y_n}(0)$ converge vers $1 - F_{\rho-\lambda}(0) = 0$, en notant F_x la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à x, $F_x(t) = 1_{t\geq x}$. Ainsi, $P(\cap_n C_n) = 0$, donc presque sûrement il existe un véhicule qui n'est pas en état de risque.