

# Percolation dans le modèle Quermass

David Coupier (Lille 1) & D. Dereudre (Valenciennes)

Journées MAS 2010

1 Le modèle Quermass

2 Percolation

## 1 Le modèle Quermass

## 2 Percolation

Soit  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ . Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont notés  $(x, R)$ .

Appelons **configuration** toute famille localement finie d'éléments de  $\mathcal{E}$ .  
Notons  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  leur ensemble. Pour toute  $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ,

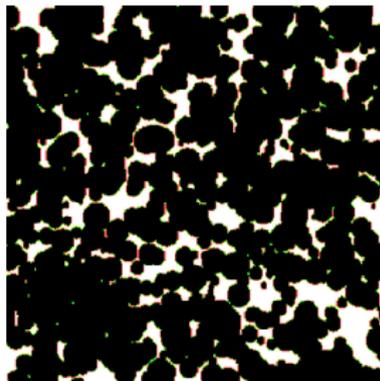
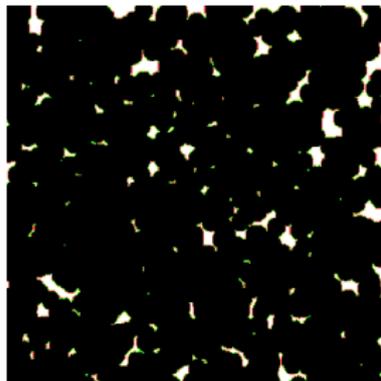
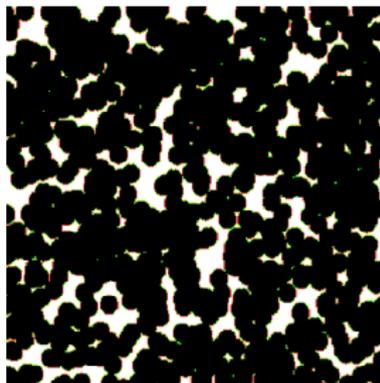
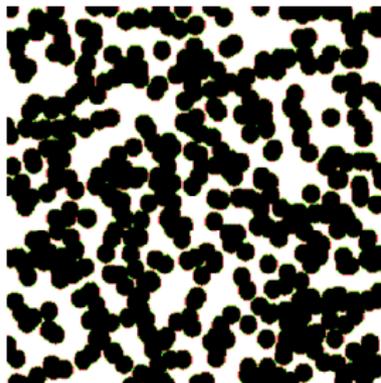
$$\bar{\gamma} = \bigcup_{(x,R) \in \gamma} B(x, R) .$$

Notons  $\pi^z$  le **processus de Poisson** sur  $\mathcal{E}$  de mesure d'intensité  $z\lambda \otimes Q$  où  $z > 0$ ,  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $Q$  une probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Définition

Sous  $\pi^z$ , l'ensemble aléatoire  $\bar{\gamma}$  définit le **modèle Booléen Poissonien** d'intensité  $z$  et de rayon aléatoire de loi  $Q$ .

# Simulations



# L'énergie locale d'une configuration $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$

- Cas où  $\gamma$  n'a qu'un nombre fini de points :

$$H(\gamma) = \theta_1 \mathcal{A}(\bar{\gamma}) + \theta_2 \mathcal{L}(\bar{\gamma}) + \theta_3 \chi(\bar{\gamma})$$

où  $\mathcal{A}$  désigne l'aire,  $\mathcal{L}$  le périmètre et  $\chi$  la caractéristique d'Euler-Poincaré, et  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- Cas général :

Restriction :  $Q([0; R_0]) = 1$ .

L'énergie locale de  $\gamma$  dans un volume fini  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  est

$$H_\Lambda(\gamma) = H(\gamma_\Delta) - H(\gamma_{\Delta \setminus \Lambda})$$

où  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  fini tel que  $\Lambda \oplus B(0, 2R_0) \subset \Delta$ .

$\leadsto$  interaction markovienne

# Le modèle Quermass

Pour  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  volume fini, notons  $\pi_\Lambda^z$  le processus de Poisson sur  $\Lambda \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $z\lambda_\Lambda \otimes Q$ .

## Définition

Le **modèle Quermass** associé à l'énergie locale  $\{H_\Lambda, \Lambda \text{ vol. fini} \subset \mathbb{R}^2\}$  est une probabilité  $P$  sur  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$  vérifiant, pour tout  $\Lambda$  fini et pour  $P$ -presque toute  $\gamma_{\Lambda^c}$ ,

$$P(d\gamma_\Lambda | \gamma_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c})} e^{-H_\Lambda(\gamma_\Lambda + \gamma_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^z(d\gamma_\Lambda).$$

- Existence : Oui pour tous  $z > 0$  et  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$  (D. Dereudre en '09).
- Unicité : Prrrrt...!? Quand il n'y a pas unicité, on parle de **transition de phase**.

# Simulations pour différentes valeurs de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$



$(-1, -1, 0)$



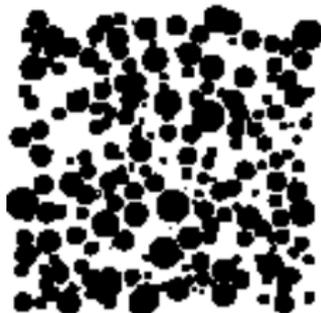
$(-1, 1, 0)$



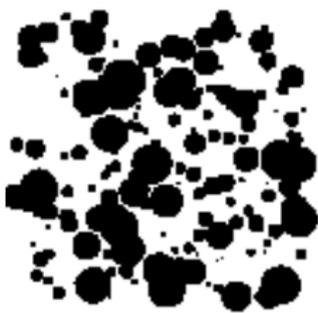
$(0, 0, 1)$



$(1, 1, 0)$



$(1, -1, 0)$



$(0, 0, -1)$

1 Le modèle Quermass

2 Percolation

## Définition

Il y a **percolation** pour la configuration  $\gamma$  s'il existe une composante connexe infinie dans  $\bar{\gamma}$ .

Lorsque  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ , le modèle Quermass  $P$  est simplement le modèle Booléen Poissonnien d'intensité  $z$  (et de rayon aléatoire  $Q$ ).

Dans ce cas, quelques résultats connus :

- L'application  $z \mapsto P(\text{percolation})$  est croissante ;
- Il existe une intensité critique  $0 < z_c < \infty$  telle que :
  - $z < z_c$  implique  $P(\text{percolation}) = 0$ ,
  - $z > z_c$  implique  $P(\text{percolation}) = 1$ .
- Unicité de la composante connexe  $P$ -ps.

# Ce qu'il en reste dans le modèle Quermass...

Soit  $P$  un modèle Quermass. Si  $P$  est **ergodique** alors :

- $P(\text{percolation})$  vaut 0 ou 1 ;
- le nombre de composantes connexes infinies est constant  $P$ -ps.

Mais si  $P$  n'est pas extrémale,  $P$  est seulement un mélange de mesures de Gibbs ergodiques...

Chayes & Kotecký en '95 ont prouvé que pour  $\theta_1 = z$  assez grand,  $\theta_2 = \theta_3 = 0$  et  $Q = \delta_1$ , il existe des Quermass vérifiant chacune des 3 situations ;  $P(\text{percolation}) = 0$ ,  $P(\text{percolation}) = 1$  et  $0 < P(\text{percolation}) < 1$ .

On perd aussi la croissance de  $z \mapsto P(\text{percolation})$ .

# Tout n'est pas perdu !

- Hypothèses :
1.  $Q([r_0, R_0]) = 1$  pour  $0 < r_0 \leq R_0$  ;
  2.  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  et  $\theta_3 = 0$ .

## Théorème 1

Il existe  $0 < z^* \leq Z^* < \infty$  tels que pour tout modèle Quermass  $P$  de paramètres  $(z, \theta_1, \theta_2, 0)$ , il vient :

- $z < z^*$  implique  $P(\text{percolation}) = 0$  ;
- $z > Z^*$  implique  $P(\text{percolation}) = 1$ .

Sur  $[z^*, Z^*]$ , il peut se passer bien des choses...

## Définition

Une fonction  $f : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **croissante** si pour tous  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ,

$$\gamma \subset \gamma' \Rightarrow f(\gamma) \leq f(\gamma') .$$

Exemple de fonction croissante :  $f(\gamma) = \mathbb{1}_{\{\text{percolation}\}}(\gamma)$ .

## Définition

Soient  $P$  et  $P'$  deux probabilités sur  $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ . On dit que  $P'$  **domine stochastiquement**  $P$ , et on note  $P \ll P'$ , si pour toute fonction croissante  $f : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$P(f) \leq P'(f) .$$

# Preuve du Théorème 1

À l'énergie locale  $H_\Lambda$  est associée la **variation d'énergie**  $h_\Lambda$  :

$$h_\Lambda((x, R), \gamma) = H_\Lambda(\{(x, R)\} \cup \gamma) - H_\Lambda(\gamma).$$

## Proposition (Georgii & Küneth en '97)

Soient  $P, P'$  deux modèles Quermass de fonctions de variation d'énergie  $h, h'$ . Si pour tous  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  fini,  $\gamma \subset \gamma'$  et  $(x, R) \in \mathcal{E}$ ,

$$h_\Lambda((x, R), \gamma) \geq h'_\Lambda((x, R), \gamma')$$

alors  $P \ll P'$ .

Supposons  $Q([r_0, R_0]) = 1$  pour  $0 < r_0 \leq R_0$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  et  $\theta_3 = 0$ . Alors,

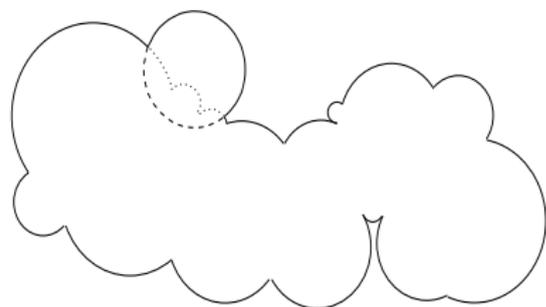
$$\exists c < C, c \leq h_\Lambda((x, R), \gamma) \leq C. \quad (\star)$$

Enfin,  $(\star) \Rightarrow \pi^{ze^{-c}} \ll P \ll \pi^{ze^{-c}} \Rightarrow$  Théorème 1.

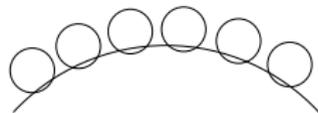
# Preuve de (★)



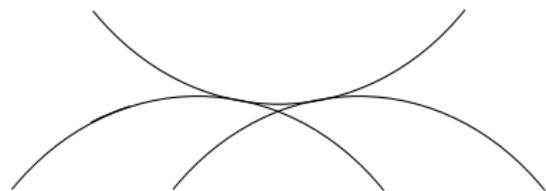
$$0 \leq \mathcal{A}((x, R), \bar{\gamma}) \leq \pi R_0^2$$



$$c^{ste}(r_0, R_0) \leq \mathcal{L}((x, R), \bar{\gamma}) \leq 2\pi R_0$$



$$c^{ste}(r_0, R_0) \leq N_{cc}((x, R), \bar{\gamma}) \leq 1$$



$$N_{tr}((x, R), \bar{\gamma}) \text{ non borné}$$

où  $\chi = N_{cc} - N_{tr}$ .

- 1 Unicité de la composante connexe infinie  $P$ -p.s. pour tout Quermass ergodique  $P$ .

*Outils* : équations DLR, arguments de trifurcation.

- 2 Soient  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_3 \leq 0$  et  $Q = \delta_{R_0}$  avec  $R_0 > 0$ .  
Si  $z$  est assez grande alors tout Quermass  $P$  correspondant satisfait

$$P(\text{percolation}) = 1 .$$

*Idée* : comparaison à un modèle mixte (site-arête) de percolation.