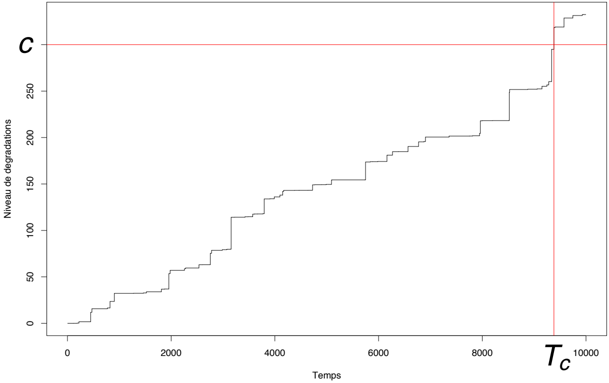
Temps d’atteinte pour un processus gamma non-homogène

Christian Paroissin

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications
Université de Pau et des Pays de l’Adour

Journées MAS 2010, Bordeaux

Objectifs généraux



- But: optimisation d'une politique de maintenance pour un système soumis à une dégradation
- Exemples : propagation de fissures, etc.

Méthodologie

- Modélisation de la dégradation :
  - niveaux discrets de dégradation : processus markoviens de saut, processus semi-markoviens, etc.
  - dégradation continue: mouvement brownien avec tendance monotone, processus gamma, processus de Poisson composé, etc. (processus de Lévy ou pas)
- Estimation des paramètres (inférence statistique)
- Propriétés de la loi de T_c (probabilité)
- Optimisation d'une politique de maintenance

Processus gamma non-homogène

Definition

Soit $\xi \in \mathbb{R}_+$ *et* $\eta = (\eta_t)_{t \geqslant 0}$ *une fonction croissante telle que* $\eta_0 = 0$. (D_t) *est un processus gamma de paramètres* (ξ, η) *ssi :*

1. $D_0 = 0$
2. *ses accroissements sont indépendants*
3. *ses accroissements sont de loi gamma*

Densité de D_t:

$$f_{D_t}(x) = \frac{1}{\xi \Gamma(\eta_t)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\eta_t - 1} e^{-x/\xi} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

1. Introduction et modèle
2. Loi du temps d'atteinte
   - Seuil déterministe
   - Seuil aléatoire
3. Propriétés de vieillissement

Problème général

- Temps d'atteinte d'un niveau fixe déterministe ou aléatoire par un processus gamma non-homogène :

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 \; ; \; D_t \geqslant c\}$$

- (D_t) est à trajectoires croissante :

$$\forall t \geqslant 0 \; , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]$$

Fonctions spéciales

- $\Gamma(\cdot)$: fonction gamma
- $\Gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète supérieure
- $\gamma(\cdot,\cdot)$: fonction gamma incomplète inférieure
- $\Psi(\cdot)$: fonction digamma ou dérivée logarithmique de $\Gamma(\cdot)$
- ${}_pF_q$: fonction hypergéométrique généralisée

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}\ ,$$

avec $(x)_n=\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ (symbole de Pochammer)

Références: Abramowitz & Stegun (72), Gradshteyn & Ryzhik (65)

1. Introduction et modèle
2. Loi du temps d'atteinte
   - Seuil déterministe
   - Seuil aléatoire
3. Propriétés de vieillissement

Loi du temps d'atteinte

Déjà calculé dans le cas stationnaire par Park & Padgett (04).
Extension au cas général :

Proposition

La fonction de répartition de T_c est donnée par :

$$F_{T_c}(t) = \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}$$

Si η est dérivable, la densité de T_c est donnée par :

$$f_{T_c}(t) = \eta_t' \left(\Psi(\eta_t) - \log\left(\frac{c}{\xi}\right)\right)\left(1 - \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}\right)$$

$$+ \frac{\eta_t'}{\eta_t^2 \Gamma(\eta_t)} \left(\frac{c}{\xi}\right)^{\eta_t} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t + 1, \eta_t + 1; -c/\xi)$$

Idée de la preuve

Pour la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_c \leqslant t] &= \mathbb{P}[D_t \geqslant c] \\ &= \int_c^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\eta_t)\xi^{\eta_t}} y^{\eta_t - 1} \exp\left(-\frac{y}{\xi}\right) dy \\ &= \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}\end{aligned}$$

Pour la densité :

$$f_{T_c}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta_t)} \frac{d}{dt} \Gamma(\eta_t, c/\xi) - \frac{\eta_t'}{\Gamma(\eta_t)} \Psi(\eta_t) \Gamma(\eta_t, c/\xi)$$

Quid pour un seuil aléatoire (cf. Abdel-Hameed, 75)?

1. Cas d’un seuil aléatoire de loi exponentielle
2. Cas d’un seuil aléatoire de loi gamma
3. Cas général ? approximation par une loi de type phase (Neuts, 94)

Loi exponentielle

Proposition

Soit C une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre ρ. La fonction de répartition de T_C est donnée par :

$$F_{T_C}(t) = 1 - (1 + \rho\xi)^{-\eta_t}$$

Si η est dérivable, alors la densité de T_C est donnée par :

$$f_{T_C}(t) = \eta'_t (1 + \rho\xi)^{-\eta_t} \log(1 + \rho\xi)$$

Résultat déjà obtenu par Frenk & Nicolai (07) via une autre méthode

Idée de la preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_C \leqslant t] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[T_C \leqslant t \mid C = x]\rho e^{-\rho x}\,dx \\ &= \frac{\rho}{\Gamma(\eta_t)}\int_0^\infty \Gamma(\eta_t, x/\xi)e^{-\rho x}\,dx\end{aligned}$$

Application de la formule (6.5.36) dans Abramowitz & Stegun (72):

$$F_{T_C}(t) = 1 - \left(\frac{1}{1+\rho\xi}\right)^{\eta_t}$$

Loi gamma

Proposition

Soit C une loi gamma de paramètres $(1/\rho, r)$. La fonction de répartition de T_C est donnée par :

$$F_{T_C}(t) = \frac{(\eta_t)_r}{r\Gamma(r)} \left(\frac{\rho\xi}{1+\rho\xi}\right)^r (1+\rho\xi)^{-\eta_t} {}_2F_1\left(1, \eta_t + r; r+1; \frac{\rho\xi}{1+\rho\xi}\right)$$

Expression différente de celle de Frenk & Nicolai (07):

$$F_{T_C}(t) = 1 - \left(\frac{\xi}{\xi+\rho}\right)^{-t} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{\eta_t + j - 1}{j} \left(\frac{\rho}{\xi+\rho}\right)^j$$

Cas général ?

Approximation par une loi de type phase : par exemple, mélange de lois d'Erlang avec le même paramètre de forme.

Proposition

Soit C une variable aléatoire positive et $(C_n)_n$ une suite de variables aléatoires de loi de type phase telle que

$$C_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} C$$

Alors,

$$T_{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} T_C$$

Notions de vieillissement (1/3)

Différentes "formes" pour des fonctions réelles :

Definition

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. *f est convexe ssi pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha s + (1 - \alpha)t) \leqslant \alpha f(s) + (1 - \alpha)f(t)$*
2. *f est étoilée ssi $t \mapsto f(t)/t$ est croissante*
3. *f est sur-additive ssi pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$, $R(t + s) \leqslant R(t)R(s)$*

Notions de vieillissement (2/3)

Notions classique :

Definition

Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. Soit $H = -\ln(1 - F)$ son taux de risque cumulée et h son taux de risque (s'il existe)

1. *F est IFR ssi H est convexe (équivalent à la croissance de h, le cas échéant)*
2. *F est IFRA ssi H est étoilée*
3. *F est NBU ssi H est sur-additive*

Relations :

$$\text{IFR} \Longrightarrow \text{IFRA} \Longrightarrow \text{NBU} .$$

Notions de vieillissement (3/3)

Taux de risque en forme de baignoire :

Definition

Une fonction de répartition F à support dans $[0, \infty)$ est BFR ssi il existe un point t_0 tel que $-\log(1 - F)$ est concave sur $[0, t_0)$ puis convexe sur $[t_0, \infty)$

Relations :

$$IFR \cup DFR \subset BFR$$

Conséquence d'un résultat précédent :

Proposition

La loi de T_C, avec C de loi exponentielle, est :

1. *IFR ssi η est convexe*
2. *IFRA ssi η est étoilée*
3. *NBU ssi η est sur-additive*
4. *BFR ssi il existe un point t_0 tel que η est concave sur $[0, t_0)$ puis convexe sur $[t_0, \infty)$*

Seuil de loi gamma

Application du résultat de Abdel-Hameed (75) :

Proposition

La loi de T_C, avec C de loi gamma de paramètres $(1/\rho, r)$, est :

1. *IFR ssi η est convexe et $r > 1$*
2. *IFRA ssi η est étoilée et $r > 1$*
3. *NBU ssi η est sur-additive et $r > 1$*

Par passage à la limite :

Proposition

Soit $c > 0$ fixé. La loi de T_c est :

1. *IFR ssi η est convexe*
2. *IFRA ssi η est étoilée*
3. *NBU ssi η est sur-additive*