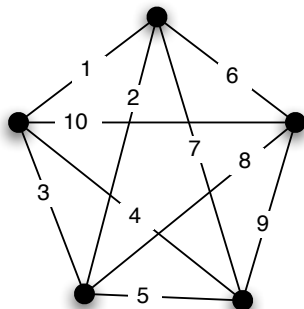


Le diamètre de l'arbre couvrant minimum d'un graphe complet

L. Addario-Berry N. Broutin B. Reed

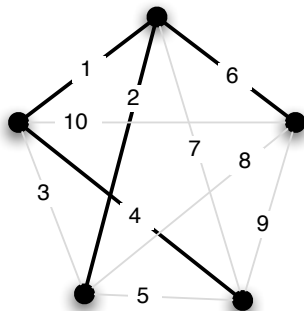
L'arbre couvrant minimum – définition

- Étant donné un graphe $G = (V, E)$
- et des poids $w_e \geq 0, e \in E$
- trouver un arbre $T = (V, E')$ tel que $\sum_{e \in E'} w_e$ est minimal.
- unique si les poids sont distincts.



L'arbre couvrant minimum – définition

- Étant donné un graphe $G = (V, E)$
- et des poids $w_e \geq 0, e \in E$
- trouver un arbre $T = (V, E')$ tel que $\sum_{e \in E'} w_e$ est minimal.
- unique si les poids sont distincts.



L'arbre couvrant minimum – un peu d'aléa

Modèle euclidien

points aléatoires dans $[0, 1]^d$

- degrés (Steele)
- poids total (Beardwood, Halton, Hammersley)
- arête la plus longue (Penrose)

Modèle champ moyen

poids w_e i.i.d. uniformes

- distribution des degrés (Aldous)
- poids total (Frieze, Aldous, etc)
- arête la plus longue (Erdős–Rényi)

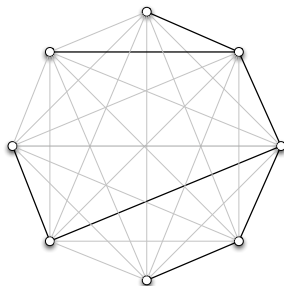
Tous ces paramètres peuvent être traités avec des arguments **locaux**

Les distances dans l'arbre couvrant minimal

D_n : nombre maximum d'arêtes sur un chemin

Théorème

$G = K_n$, w_e iid, alors $\mathbf{ED}_n = \Theta(n^{1/3})$



Algorithme de Kruskal: croissance d'une forêt couvrante

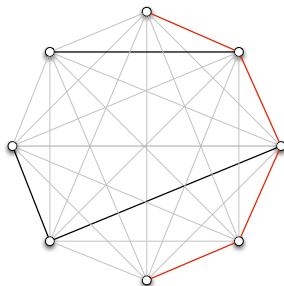
- trier les arêtes $w_{e_1} < w_{e_2} < \dots$
- commencer avec $F_0 = (V, \emptyset)$
- pour chaque i , ajouter e_i à F_{i-1} si elle ne crée pas de cycle
- lorsque F_i est connexe, c'est l'arbre couvrant minimum

Les distances dans l'arbre couvrant minimal

D_n : nombre maximum d'arêtes sur un chemin

Théorème

$G = K_n$, w_e iid, alors $\mathbf{ED}_n = \Theta(n^{1/3})$



Algorithme de Kruskal: croissance d'une forêt couvrante

- trier les arêtes $w_{e_1} < w_{e_2} < \dots$
- commencer avec $F_0 = (V, \emptyset)$
- pour chaque i , ajouter e_i à F_{i-1} si elle ne crée pas de cycle
- lorsque F_i est connexe, c'est l'arbre couvrant minimum

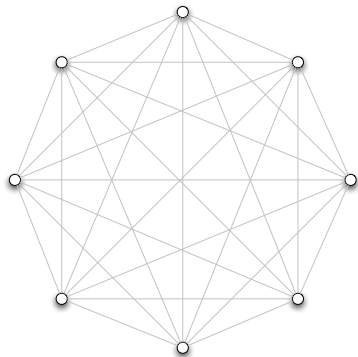
Graphes aléatoires d'Erdős-Rényi

Le graphe aléatoire $G_{n,p}$

- n noeuds,
- chaque arête présente avec probabilité p

Couplage avec le graphe pondéré:

- $w_e \sim \text{Uniforme-}[0, 1]$
- e présente si $w_e \leq p$



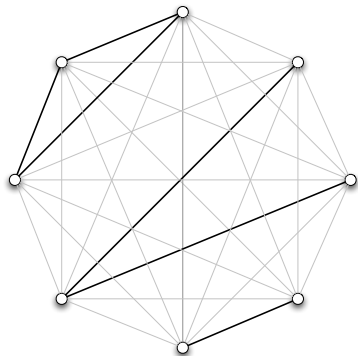
Graphes aléatoires d'Erdős-Rényi

Le graphe aléatoire $G_{n,p}$

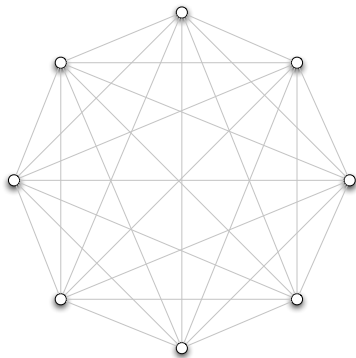
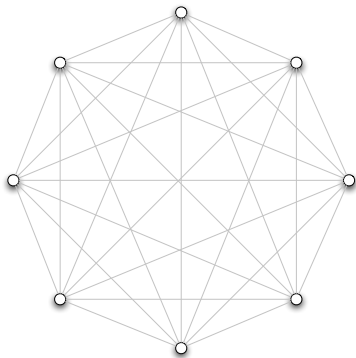
- n noeuds,
- chaque arête présente avec probabilité p

Couplage avec le graphe pondéré:

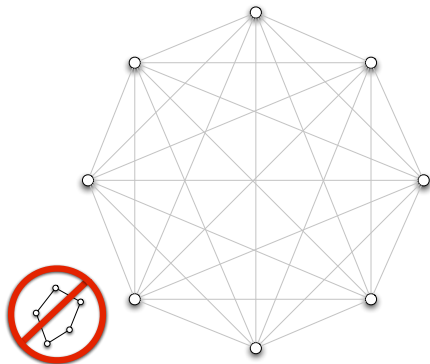
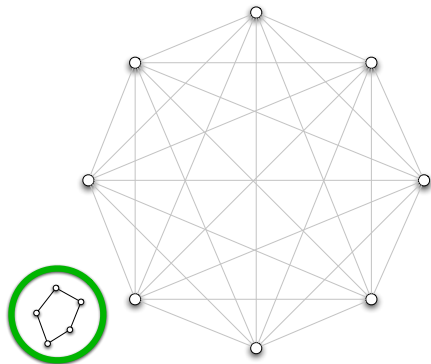
- $w_e \sim \text{Uniforme-}[0, 1]$
- e présente si $w_e \leq p$



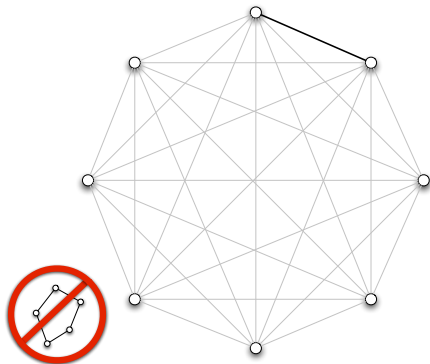
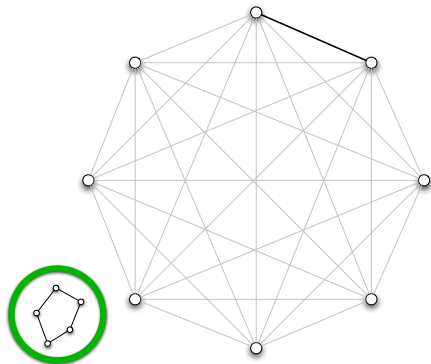
Filtrer les arêtes par poids



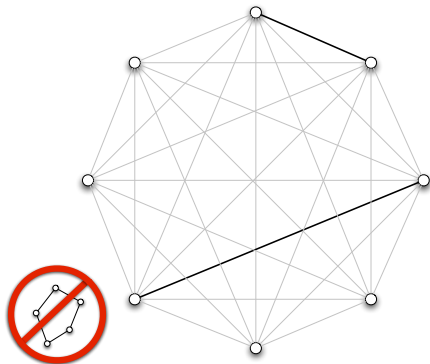
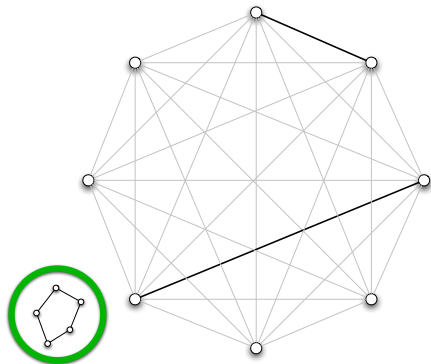
Filterer les arêtes par poids



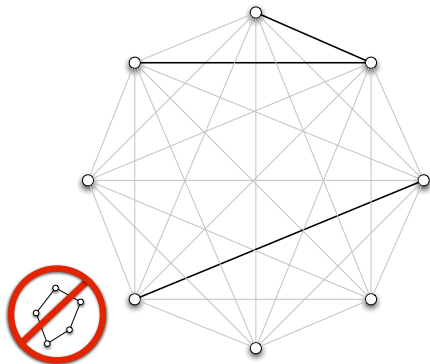
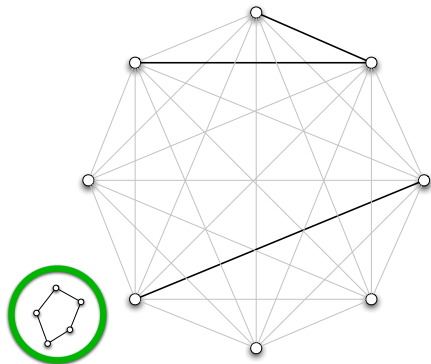
Filtrer les arêtes par poids



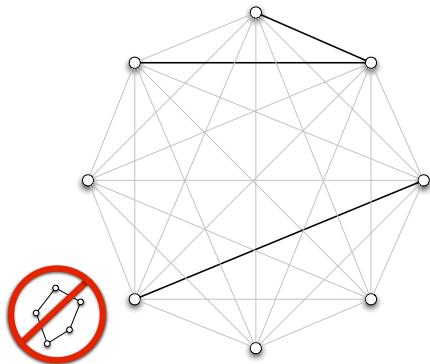
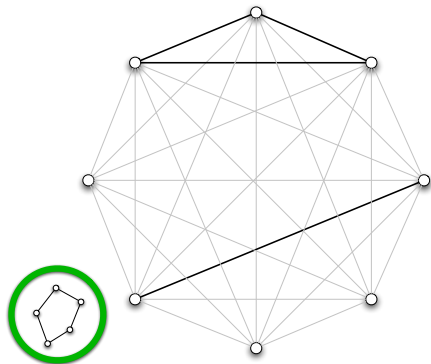
Filterer les arêtes par poids



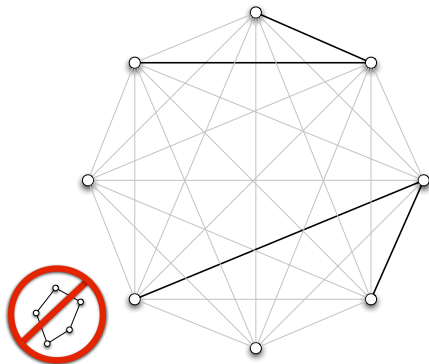
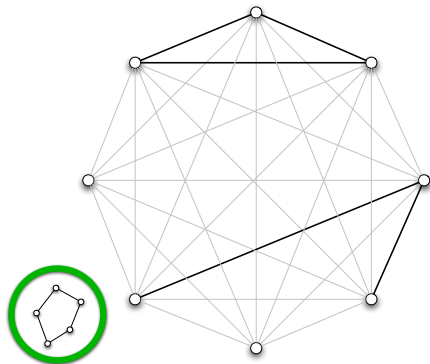
Filtrer les arêtes par poids



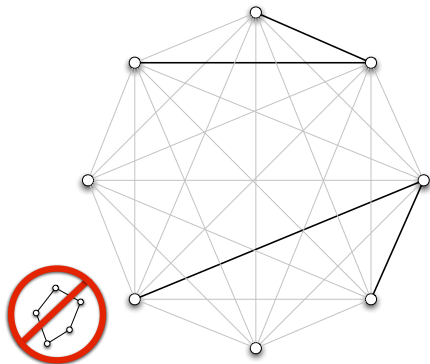
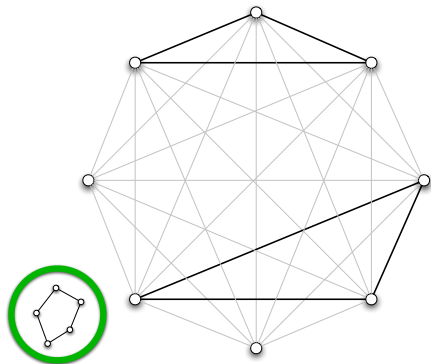
Filtrer les arêtes par poids



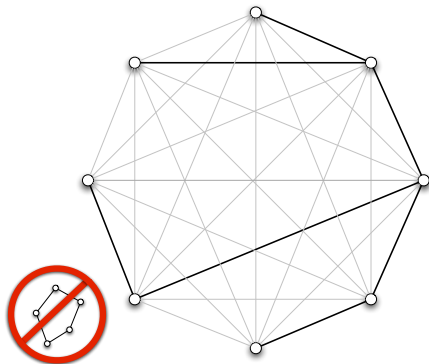
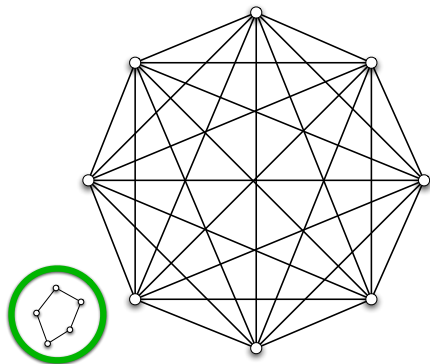
Filtrer les arêtes par poids



Filtrer les arêtes par poids



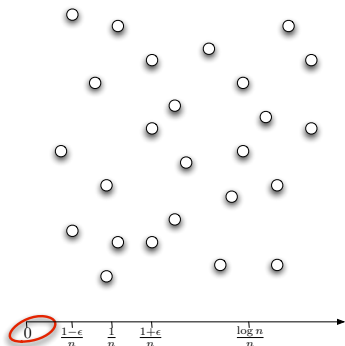
Filtrer les arêtes par poids



Tirer parti de la structure des composantes connexes

Evolution du processus $G_{n,p}$ (Erdős & Rényi, 1960)

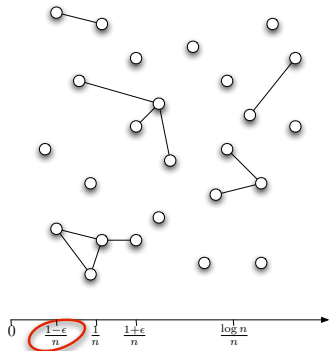
- **sous-critique** $p = \frac{1-\epsilon}{n}$: arbres et composantes unicycliques de taille $O(\log n)$
- **critique** $p = \frac{1}{n}$: beaucoup de composantes de taille $\Theta(n^{2/3})$
- **sur-critique** $p = \frac{1+\epsilon}{n}$: un unique géant $\Theta(n)$, le reste est sous-critique
- **connexe** $p = \frac{\log n + O(1)}{n}$



Tirer parti de la structure des composantes connexes

Evolution du processus $G_{n,p}$ (Erdős & Rényi, 1960)

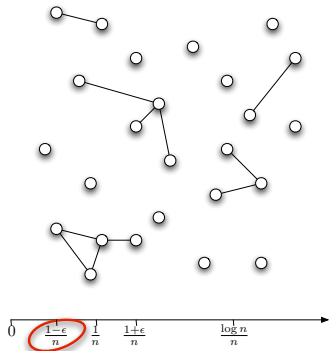
- **sous-critique** $p = \frac{1-\epsilon}{n}$: arbres et composantes unicycliques de taille $O(\log n)$
- **critique** $p = \frac{1}{n}$: beaucoup de composantes de taille $\Theta(n^{2/3})$
- **sur-critique** $p = \frac{1+\epsilon}{n}$: un unique géant $\Theta(n)$, le reste est sous-critique
- **connexe** $p = \frac{\log n + O(1)}{n}$



Tirer parti de la structure des composantes connexes

Evolution du processus $G_{n,p}$ (Erdős & Rényi, 1960)

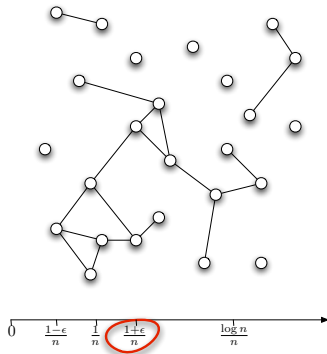
- **sous-critique** $p = \frac{1-\epsilon}{n}$: arbres et composantes unicycliques de taille $O(\log n)$
- **critique** $p = \frac{1}{n}$: beaucoup de composantes de taille $\Theta(n^{2/3})$
- **sur-critique** $p = \frac{1+\epsilon}{n}$: un unique géant $\Theta(n)$, le reste est sous-critique
- **connexe** $p = \frac{\log n + O(1)}{n}$



Tirer parti de la structure des composantes connexes

Evolution du processus $G_{n,p}$ (Erdős & Rényi, 1960)

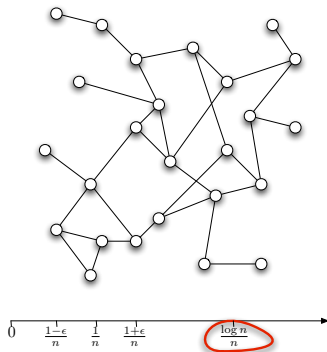
- **sous-critique** $p = \frac{1-\epsilon}{n}$: arbres et composantes unicycliques de taille $O(\log n)$
- **critique** $p = \frac{1}{n}$: beaucoup de composantes de taille $\Theta(n^{2/3})$
- **sur-critique** $p = \frac{1+\epsilon}{n}$: un unique géant $\Theta(n)$, le reste est sous-critique
- **connexe** $p = \frac{\log n + O(1)}{n}$



Tirer parti de la structure des composantes connexes

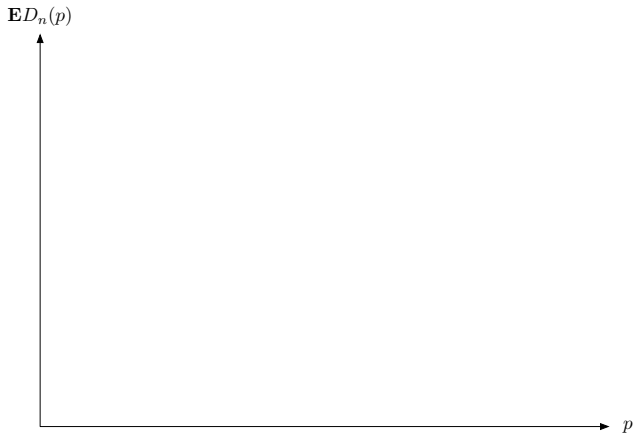
Evolution du processus $G_{n,p}$ (Erdős & Rényi, 1960)

- **sous-critique** $p = \frac{1-\epsilon}{n}$: arbres et composantes unicycliques de taille $O(\log n)$
- **critique** $p = \frac{1}{n}$: beaucoup de composantes de taille $\Theta(n^{2/3})$
- **sur-critique** $p = \frac{1+\epsilon}{n}$: un unique géant $\Theta(n)$, le reste est sous-critique
- **connexe** $p = \frac{\log n + O(1)}{n}$



Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$



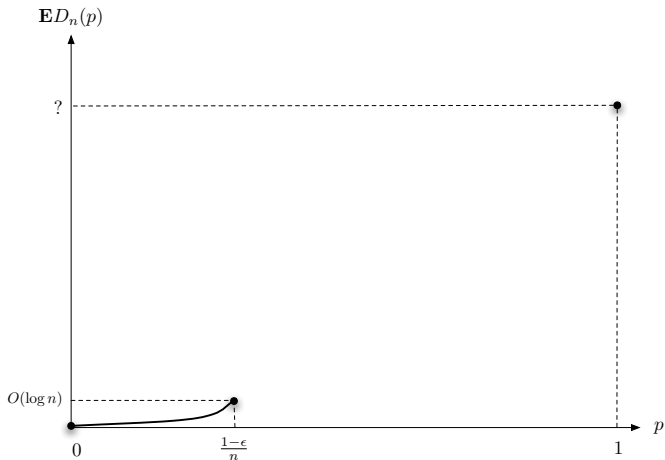
Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$



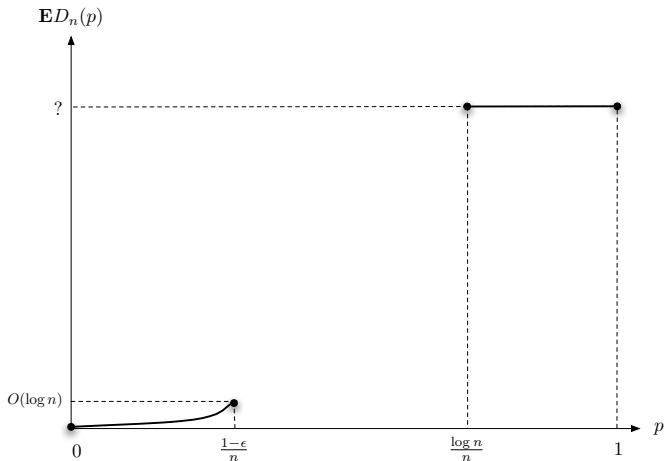
Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$



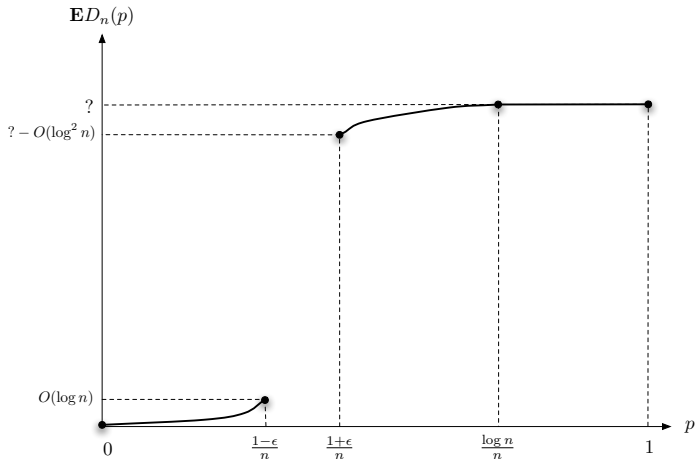
Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$



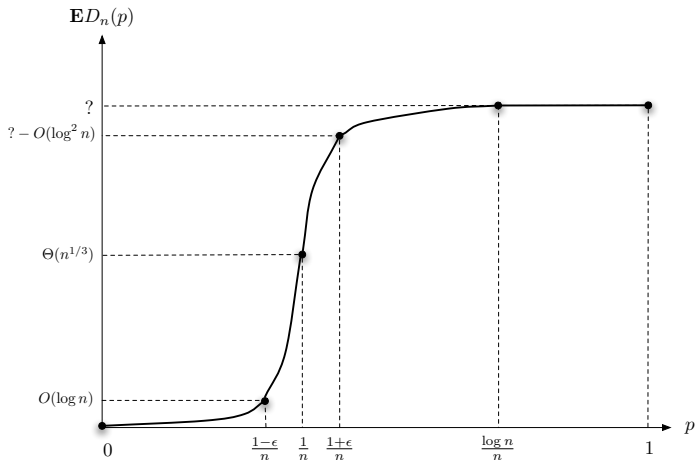
Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$

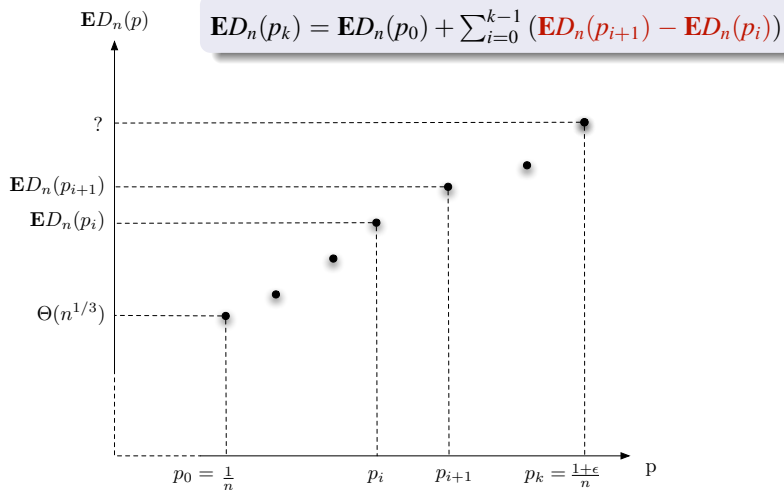


Vers le diamètre de l'arbre couvrant minimum

$D_n(p)$: diamètre de la sous-forêt du MST contenant les arêtes e avec $w_e \leq p$

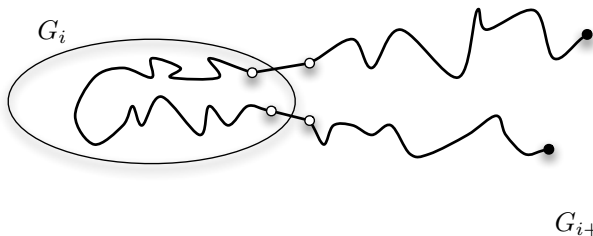


Idée: contrôler l'évolution sur de petites périodes



Borner $\mathbf{ED}_n(p_{i+1}) - \mathbf{ED}_n(p_i)$

Deux forêts $G_i \subseteq G_{i+1}$ (par les arêtes); $D_n(p_i)$ et $D_n(p_{i+1})$ leurs diamètres



$2L_n(G_{i+1} \setminus G_i)$ la taille du plus long chemin dans G_{i+1} qui n'utilise aucune arête de G_i

Fait

$$D_n(p_{i+1}) \leq D_n(p_i) + 2L_n(G_{i+1} \setminus G_i) + 2$$

Le choix des temps de contrôle p_i

Théorème (Łuczak, 1990)

Soit $p = 1/n + fn^{-4/3}$, avec $f \rightarrow \infty$. Alors, avec probabilité tendant vers 1,

- la plus grande composante $H_n(p)$ est de taille $\Omega(fn^{2/3})$
- toutes les autres contiennent au plus $O(n^{2/3}/f)$ noeuds
- $H_n(p) \subset H_n(p + \delta)$ pour tout $\delta \geq 0$

On choisit $p_i = 1/n + f_i n^{-4/3}$ avec $f_i = c^i$, $c > 1$ une constante fixée.

- on doit donner de vraies bornes pour le résultat de Łuczak ($f \not\rightarrow \infty$)
- **techniquement**: processus de branchement et concentration de marches aléatoires

$$\mathbf{ED}_n(p_{i+1}) - \mathbf{ED}_n(p_i) = O(n^{1/3}/f_i^{1/6})$$

Youpi, dansons la carioca

