Estimation de la volatilité instantanée (dans un modèle à volatilité stochastique)

A. Alvarez, F. Panloup, M. Pontier, N. Savy

"Journées MAS-Bordeaux "
du 31/08 au 3/09 2008

Plan

Cadre de travail

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, (W_t) un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien.
- (S_t) une dynamique de prix telle que $X_t = \log(S_t)$ est une semimartingale sous la forme :

$$X_t = x + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad \forall t \geq 0,$$

  où $(a_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ sont des processus càdlàg, (a_t), (σ_t) et (X_t) $(\mathcal{F}_t)$-adaptés.
- Sur $[0, T]$, X_t observé en $i\Delta_n$, $i = 0, 1, \ldots, [\frac{T}{\Delta_n}]$ où (Δ_n) tend vers 0.
- Objectif : Estimer la volatilité instantanée (non observée sur le marché) : σ_t (Obtension de TCLs pour obtenir des intervalles de confiance pour σ_t).

Power-Variations

- $\Delta X_n^i = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}$. On notera $\hat{B}(p, \Delta_n)$ le processus des variations d'ordre p associé aux observations du processus :

$$\hat{B}(p, \Delta_n)_t = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p, \quad t \in [0, T].$$

- Lorsque $p = 2$, on sait que

$$\hat{B}(p, \Delta_n)_t \xrightarrow{n \to +\infty} \langle X, X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \quad u.c.p.$$

- Plus généralement,

$$\Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \hat{B}(p, \Delta_n)_t \xrightarrow{n \to +\infty} m_p \int_0^t \sigma_s^p ds \quad u.c.p.$$

où $m_p = \mathbb{E}[|U_1|^p]$ où $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Convergence stable

- Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Une suite de variables aléatoires (Y_n) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E converge $\mathcal{G}$-stablement s'il existe une variable aléatoire Y définie sur une extension $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ de l'espace initial telle que $\forall$ Z $\mathcal{G}$-mesurable, $\forall$ f continue bornée sur E,

$$\mathbb{E}[Zf(Y_n)] \Longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}[Zf(Y)].$$

- Conséquences : $(Z, Y_n) \Longrightarrow (Z, Y)$. En particulier, si $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$,

$$\frac{Y_n}{Z} \Longrightarrow \frac{Y}{Z}.$$

$-- >$ Résultat intéréssant dans un TCL où la variance limite est une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable.

TCL vers la volatilité intégrée

- Hypothèses (non précises) : $p \geq 2$, (σ_s) semimartingale strictement positive $\lambda(ds)$-ps sans sauts prévisibles.
- Théorème (Jacod, 2008) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left(\Delta_n^{1-\frac{p}{2}}\hat{B}(p,\Delta_n)_t - m_p\int_0^t |\sigma_s|^p ds\right) \overset{\mathcal{F}-stably}{\Longrightarrow} Y_t(p).$$

pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0,T]$. De plus, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathcal{L}(Y_t(p)/\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(0,(m_{2p}-(m_p)^2)\int_0^t |\sigma_s|^{2p} ds).$$

Estimateur de la vol. instantanée

- On note (h_n) une suite décroissante de nombres strictement positifs telle que $h_n \to 0$. Pour tout $t \in [0, T - h_1]$, on note $\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t$ la variable aléatoire définie par:

$$\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t := \frac{\Delta_n^{1-\frac{p}{2}}\left(\hat{B}(p, \Delta_n)_{t+h_n} - \hat{B}(p, \Delta_n)_t\right)}{m_p h_n}.$$

$$= \frac{\Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \sum_{[t/\Delta_n]+1}^{[(t+h_n)/\Delta_n]} |\Delta_i^n X|^p}{m_p h_n}.$$

- Objectif : Montrer que $(\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t)_{n \geq 1}$ est un estimateur convergent de $|\sigma_t|^p$ et déterminer la vitesse de convergence optimale en fonction du choix de h_n.

Hypothèses (précises) sur σ

$(\mathbf{H_q^1})$: $q \in [1,2]$. σ est une semimartingale strict. positive telle que $\sigma_t = |Y_t|$ où (Y_t) est de la forme:

$$dY_s = b_s ds + \eta_1(s)dW_s + \eta_2(s)dW_s^2 + \int_{\mathbb{R}} y 1_{|y|\leq 1}(\mu(ds,dy) - \nu(ds,dy)) + \int_{\mathbb{R}} y 1_{|y|>1}\mu(ds,dy),$$

- W^2 $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien indépendant de W.
- b, η_1, η_2 et partie sauts càdlàg $\mathcal{F}_t$-adaptés.
- μ : mesure des sauts définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec compensateur prévisible ν tel que: $\nu(dt,dy) = dtF_t(dy)$ et $(\int (1 \wedge |y|^q)F_t(dy))_{t\geq 0}$ est un processus prévisible localement borné. (σ_t) est alors quasi-continu à gauche et la composante de sauts à q-variations localement bornées.

Hypothèses (suite)

$(\mathbf{H_q^2})$: For every $T > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \int_{\{|y| \leq \varepsilon\}} |y|^q F_t(dy) = 0 \qquad a.s.$$

- Exemple : Si la partie sauts est de la forme $\int_0^t \kappa(X_{s-})dZ_s$ où κ est localement bornée et (Z_t) est un processus de Lévy de mesure de Lévy π telle que $\int(|y|^q \wedge 1)\pi(dy) < +\infty$ (toujours vrai avec $q = 2$), alors $(\mathbf{H_q^1})$ et $(\mathbf{H_q^2})$ sont satisfaites.
  Dans ce cas, $F_t(dz)$ est définie par

$$\int f(z)F_t(dz) = \int f(\kappa(X_{t-})y)\pi(dy)$$

pour tout f à support dans $\{x, |x| \geq \varepsilon\}$.

Résultats

- Théorème (Cas général) $(\mathbf{H}_2^1)$ et $(\mathbf{H}_2^2)$ satisfaites, $\Delta_n = o(h_n)$. Alors, pour $p = 2$ et $p \geq 3$,
  (i) Si $h_n/\sqrt{\Delta_n} \to 0$,
  $$\sqrt{\frac{h_n}{\Delta_n}}(\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t - \sigma_t^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{F}-stably} \sqrt{\frac{m_{2p} - m_p^2}{m_p^2}}\sigma_t^p \quad U,$$
  où conditionnellement à $\mathcal{F}$, U est une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.
  (ii) Si $\sqrt{\Delta_n}/h_n \to \beta \in \mathbb{R}_+$,
  $$\frac{1}{\sqrt{h_n}}(\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t - \sigma_t^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{F}-stably} \phi(\beta, \sigma, \eta_1, \eta_2) \quad U,$$

Conséquences

- $\Delta_n = 1/n,\ h_n = n^{-\rho}$. Alors,

$$\text{Vitesse en } \begin{cases} n^{\frac{1-\rho}{2}} & \text{si } \rho \in [1/2, 1) \\ n^{\frac{\rho}{2}} & \text{si } \rho \in (0, 1/2) \end{cases}$$

  Vitesse optimale en $n^{-\frac{1}{4}}$ pour $\rho = 1/2$.

- Cas (i) : (seul) cas intéressant statistiquement car la convergence stable implique que

$$\sqrt{\frac{h_n}{\Delta_n}}\left(\frac{\Sigma(p, \Delta_n, h_n)_t}{\sigma_t^p} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{F}-stably} \sqrt{\frac{m_{2p} - m_p^2}{m_p^2}}\ U,$$

  On peut donc construire des intervalles de confiance.

Intervalle de confiance asymptotiques

- Prenons $\alpha = 5\%$. L'intervalle de confiance (asymptotique) pour σ_t^p est alors de la forme

$$\left[\frac{m_p\sqrt{r_n}\,\Sigma(p,\Delta_n,h_n)_t}{m_p\sqrt{r_n}+1.96\sqrt{m_{2p}-m_p^2}}\,,\ \frac{m_p\sqrt{r_n}\,\Sigma(p,\Delta_n,h_n)_t}{m_p\sqrt{r_n}-1.96\sqrt{m_{2p}-m_p^2}}\right].$$

- On en déduit alors un intervalle pour σ_t dont la longueur est de l'ordre de

$$\sqrt{\frac{\Delta_n}{h_n}}\frac{\sqrt{m_{2p}-m_p^2}}{pm_p}.$$

A n, Δ_n, h_n fixés, cette longueur est minimale pour $\ldots p = 2$.

Cas σ processus de saut pur

- Théorème $\eta_1 = \eta_2 = 0$. $(\mathbf{H_q^1})$ et $(\mathbf{H_2^q})$ satisfaites avec $q \in [1,2]$, $\Delta_n = o(h_n)$. Alors, pour $p = 2$ et $p \geq 3$,
  (i) Si $q \in (1,2]$, si $\limsup_{n\to+\infty} h_n^{1/2+1/q}/\sqrt{\Delta_n} < +\infty$,

$$\sqrt{\frac{h_n}{\Delta_n}}(\Sigma(p,\Delta_n,h_n)_t - \sigma_t^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{F}-stably} \sqrt{\frac{m_{2p}-m_p^2}{m_p^2}}\sigma_t^p \quad U,$$

  où conditionnellement à $\mathcal{F}$, U est une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.
  (ii) $q = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} h_n^3/\Delta_n = \beta \in \mathbb{R}_+$.

$$\sqrt{\frac{h_n}{\Delta_n}}(\Sigma(p,\Delta_n,h_n)_t - \sigma_t^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{F}-stably} \sqrt{\frac{m_{2p}-m_p^2}{m_p^2}}\sigma_t^p \quad U + \beta\theta_t,$$

  où θ_t s'écrit à l'aide de b et de la mesure F_t.

Ordre de la vitesse

- $\Delta_n = 1/n$, $h_n = n^{-\rho}$. Comme dans le cas général, la vitesse de convergence est toujours en

$$n^{\frac{1-\rho}{2}}$$

tant que

$$\rho \geq \frac{1}{1+\frac{2}{q}}.$$

d'où vitesse optimale en $n^{-\frac{1}{q+2}}$.
Lorsque $q = 1$, Vitesse optimale de l'ordre de $n^{-\frac{1}{3}}$.

Idée de la preuve

Etape 1 : Localisation.

- On peut remplacer $(\mathbf{H_q^1})$ par :

$(\mathbf{SH})_\mathbf{q}$ a,b, η_1, η_2 et $\int_0^. \int (|y|^q \wedge 1) F_s(dy)ds$ sont bornés et il existe $M > 0$ tel que $F_s([-M, M]^c) = 0$ $p.s.$ $\forall s \geq 0$.

- Arguments : 1. pour un processus localement borné (z_t), il existe par définition une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) telle que $T_n \to +\infty$ $p.s.$ (z_t) est borné sur $[0, T_n]$ pour tout n.
  2. $\int_{|y| \geq 1} F_t(dy)$ localement borné $\Longrightarrow$ nombre p.s. fini de "grands" sauts sur un intervalle borné ce qui implique qu'on peut également supposer les sauts bornés en localisant : il existe une suite de temps d'arrêt $(\tilde{T}_n)$ telle que $\tilde{T}_n \to +\infty$ p.s. et telle que σ a des sauts bornés sur $[0, \tilde{T}_n]$.

Etape 2 : Décomposition de l'erreur

- On décompose dans un premier temps l'erreur en deux parties:

$$\Sigma(p,\Delta_n,h_n)_t - \sigma_t^p = \frac{Z_{t+h_n}^{(n,p)} - Z_t^{(n,p)}}{m_p h_n} + \left(\frac{1}{r_n}\sum_{i=[\frac{t}{\Delta_n}]+1}^{[\frac{t+h_n}{\Delta_n}]} \sigma_{i\Delta_n}^p - \sigma_t^p\right)$$

$$= \mathcal{E}_1(n,t) + \mathcal{E}_2(n,t),$$

où $r_n = h_n/\Delta_n$ et

$$Z_t^{(n,p)} := \Delta_n^{1-\frac{p}{2}} \hat{B}(p,\Delta_n)_t - m_p \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} \Delta_n \sigma_{i\Delta_n}^p.$$

Etude de $\mathcal{E}_1(n,t)$

$$\mathcal{E}_1(n,t) = \sum_{i=[\frac{t}{\Delta_n}]+1}^{[\frac{t+h_n}{\Delta_n}]} \Delta_n^{\frac{p}{2}-1}|\Delta X_n^i|^p - m_p \sigma^p_{(i-1)\Delta_n}.$$

- On extrait la partie martingale. Si le terme de drift $a_t = 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\Delta X_n^i|^p/\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}] &\approx \sigma^p_{(i-1)\Delta_n}\mathbb{E}[|\Delta W_n^i|^p/\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}]\\ &= \Delta_n^{\frac{p}{2}-1} m_p \sigma^p_{(i-1)\Delta_n}.\end{aligned}$$

  Sinon, on doit s'y ramener :

$$\begin{aligned}|\Delta X_n^i|^p - m_p \Delta_n^{1-\frac{p}{2}}\Delta_n^{1-\frac{p}{2}}\sigma^p_{(i-1)\Delta_n} &= |\Delta X_n^i|^p - \sigma^p_{(i-1)\Delta_n}|\Delta W_n^i|^p\\ &+ \sigma^p_{(i-1)\Delta_n}\left(|\Delta W_n^i|^p - \mathbb{E}[|\Delta W_n^i|^p/\mathcal{F}_{(i-1)\Delta_n}]\right).\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_2(n,t)$

- Dans les cas où h_n est "petit", le contrôle suivant est suffisant :

$$\mathbb{E}[|\sigma_{t+s}^p - \sigma_t^p|] = \begin{cases} O(\sqrt{s}) & \text{dans le cas général} \\ = O(s^{\frac{1}{q}}) & \text{dans le cas particulier } \eta_1 = \eta_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\sqrt{\frac{\Delta_n}{h_n}}\mathbb{E}[|\frac{1}{r_n}\sum_{i=[\frac{t}{\Delta_n}]+1}^{[\frac{t+h_n}{\Delta_n}]} \sigma_{i\Delta_n}^p - \sigma_t^p|] = \begin{cases} O(\frac{h_n}{\sqrt{\Delta_n}}) & \text{cas général} \\ = O(\frac{h_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}}{\sqrt{\Delta_n}}) & \eta_1 = \eta_2 = 0 \end{cases}$$

- Dans le cas h_n grand, il faut extraire la partie martingales principale.

TCLs pour martingales

- Rappel : Pour tout $n \geq 1$, soit $\{\bar{\mathcal{F}}_{n,i}, i \in 0 \dots k_n\}$ une filtration et $\{\xi_i^n, i \in \{1, \dots, k_n\}\}$ une suite d'accroissements de martingales $(\bar{\mathcal{F}}_{n,i})_i$-adaptés. Alors, si

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[(\xi_i^n)^2 / \bar{\mathcal{F}}_{n,i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta(\omega) \quad \text{lorsque } n \to +\infty, \qquad (1)$$

(2) Condition de type Lindeberg : Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[(\xi_i^n)^2 \mathbf{1}_{|\xi_i^n|^2 \geq \varepsilon} / \bar{\mathcal{F}}_{n,i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$

(3) $\mathcal{F}_{n,i} \subset \mathcal{F}_{n+1,i}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k_n\}$,
$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} \xi_i^n$ converge $\mathcal{F}$-stablement vers une v.a. S telle que $\mathcal{L}(S/\mathcal{F}) = \mathcal{N}(0, \eta)$.

- Problème : ici, la condition (iii) n'est pas satisfaite.

TCLs pour martingales(suite)

- Cependant, dans notre cas, η est $\mathcal{F}_t$-mesurable ce qui permet d'obtenir la convergence $\mathcal{F}_t$-stable vers une v.a. S telle que $\mathcal{L}(S/\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(0, \eta)$ (cf Eagleson).
- Pour obtenir ensuite la convergence $\mathcal{F}$-stable, on utilise que pour toute v.a. Z bornée,

$$\mathbb{E}[Zf(S_n)] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z/\mathcal{F}_t]f(S_n)] = |\mathbb{E}[(\mathbb{E}[Z/\mathcal{F}_{t+h_n}] - \mathbb{E}[Z/\mathcal{F}_t])\, f(S_n)]|$$

  tend vers 0 par le théorème de convergence pour les martingales inverses.
- Ainsi,

$$\mathbb{E}[Zf(S_n)] \to \int \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z/\mathcal{F}_t]f(\sqrt{\eta}u)]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \mathbb{E}'[Zf(S')].$$

  où S' est une v.a. définie sur un espace Ω' telle que $\mathcal{L}(S/\mathcal{F}) = \mathcal{N}(0, \eta)$.

Simulations

Modèle (Papanicolaou et Fouque)

$$\begin{cases} dX_t = (r - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt + \sigma(t)dW_t^1 \\ dv_t = a(m - v_t)dt + \beta(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2), \end{cases}$$

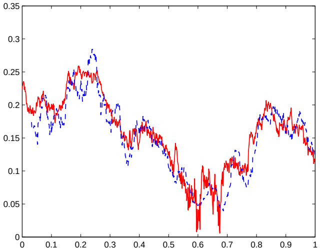

Figure: $n = 1000$, $h_n = n^{-1/2}$

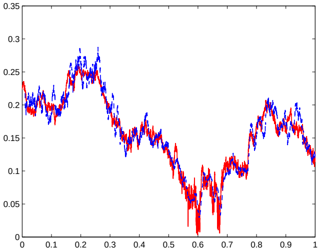

Figure: $n = 10000$, $h_n = n^{-1/2}$