Quelques conditionnements à la non-extinction de processus de branchement

Sylvie Roelly

Universität Potsdam

Journée en l'honneur de Jacques Neveu
Bordeaux, ce 31 août 2010

Outline

Problématique

Analyse de l'extinction de populations se reproduisant selon une dynamique de branchement :

- comportement avant l'extinction
- comportement en cas d'extinction extrêmement tardive

- intérêt mathématique propre (mesure quasi-stationnaire, Q-processus...)
- nombreuses applications en dynamique des populations (par ex. en épidémiologie)

Modèles étudiés :

- Processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW) multitype
- Diffusion de Feller multitype
- Processus de Dawson-Watanabe multitype

Un peu de bibliographie

Cas monotype

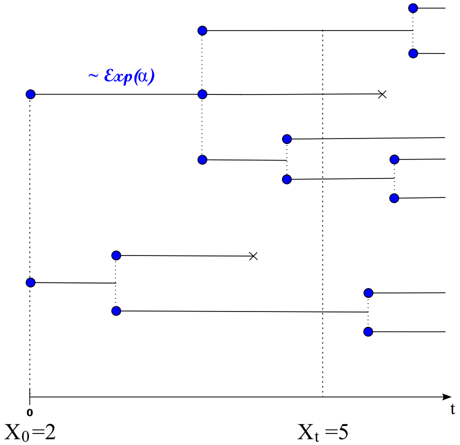
- *Processus de Bienaymé-Galton-Watson* ($\in \mathbb{N}$):
  Lamperti et Ney (1968), Kawazu et Watanabe (1971)
- *Processus de branchement à espace d'état continu* ($\mathbb{R}^+$ ou mesures):
  Chauvin (1988), R. et Rouault (1989), Evans et Perkins (1990), Evans (1993), Etheridge et Williams (2004), Lambert (2007)

Cas multitype (d types):

- *Processus de Bienaymé-Galton-Watson* ($\in \mathbb{N}^d$):
  Ogura (1975), Foster et Ney (1975, 1979), Zubkov (1982), Joffe et Métivier (1986), Vatutin et Sagitov (1988), Imomov (2005), Dallaporta et Joffe (2008), Pénisson (2010)
- *Diffusion de Feller* ($\in \mathbb{R}_+^d$): Pénisson (2010)
- *Processus de Dawson-Watanabe* : Champagnat et R. (2008)

Cadre plus général de *processus de vie ou de mort* ($\in \mathbb{N}$) et *diffusion de Feller logistique* ($\in \mathbb{R}^+$) : Cattiaux, Collet, Lambert, Martinez, Méléard, San Martin (2009)

BGW monotype à temps continu



BGW monotype à temps continu

X_t, processus de Markov à temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérisé par :

- temps de vie exponentiel de chaque individu de paramètre $\alpha > 0 =$ *taux de branchement*
- loi de reproduction, égale pour chaque individu : $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$
  - fonction génératrice $f(r) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k r^k$, $|r| \leqslant 1$
  - espérance(= nombre moyen de descendants par individu) : $m < +\infty$
  - variance $\sigma^2 < +\infty$

$(X_t)_t$ est défini par exemple par la famille de fonctions génératrices

$$F_t(r) := \mathbb{E}_1(r^{X_t}), \quad |r| \leqslant 1.$$

qui satisfait:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_t(r)}{\partial t} = \alpha\Big(f\left(F_t(r)\right) - F_t(r)\Big) \\ F_0(r) = r \end{cases}$$

La propriété de branchement implique: $\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_i(r^{X_t}) = F_t(r)^i$

BGW conditionné

Quand $m \leqslant 1$ le processus est (sous-)critique et s'éteint p.s.:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(X_t = 0\right) = 1.$$

L'on s'intéresse alors aux conditionnements suivants:

- non-extinction à l'instant présent

  $$\mathbb{P}\left[X_t \in .|X_t > 0\right],$$

  et sa limite asymptotique en temps ($t \to +\infty$) dite limite de Yaglom.
- non-extinction dans un θ-futur, i.e.

  $$\mathbb{P}\left[X_t \in .|X_{t+\theta} > 0\right], \quad \theta > 0,$$

  et ses limites asymptotiques
  - pour $t \to +\infty$: limite de θ-Yaglom
  - pour $\theta \to +\infty$: Q-processus.

Loi de Yaglom

Théorème (Yaglom, 1947)

Si la dynamique est sous-critique ($m < 1$), alors il existe une probabilité ν sur $\mathbb{N}^*$, loi quasi-limite, telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_i \left[X_t = \cdot | X_t > 0 \right] = \nu \ .$$

ν est indépendante de la condition initiale : c'est une loi dite de Yaglom. De plus, ν est une mesure quasi-stationnaire, i.e. elle est invariante sous la dynamique conditionnée à la non-extinction:

$$\forall t \geqslant 0, \forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}_\nu \left[X_t = j | X_t > 0 \right] = \nu_j .$$

Conditionnement à la non-extinction dans un futur infiniment lointain

Proposition

Si la dynamique est (sous-)critique ($m \leq 1$), on peut définir une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ sur $\bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t$ par

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall t \geqslant 0, \forall B \in \mathcal{F}_t,\ \mathbb{P}_i^*[B] := \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}_i [B \,| X_{t+\theta} > 0] .$$

Elle satisfait

$$\mathbb{P}_i^*|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\alpha(m-1)t}\, \frac{X_t}{i}\ \mathbb{P}_i|_{\mathcal{F}_t}.$$

La loi conditionnée $\mathbb{P}^*$ est donc la h-transformée de la loi non-conditionnée $\mathbb{P}$, via la martingale $(e^{-\alpha(m-1)t}\, X_t)_{t\geqslant 0}$.

$\mathbb{P}^*$ est appelé Q-processus associé à $\mathbb{P}$.

Interprétation comme un branchement avec immigration

Proposition

Le processus conditionné $\mathbb{P}^*$ *est un processus de BGW avec une immigration de taux donné par* $\alpha\left(f' - m\right)$*, i.e. sa fonction génératrice a la forme suivante:* $\forall t \geqslant 0, |r| \leqslant 1$ *and* $i \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{E}_i^*\left[r^{X_t - 1}\right] = F_t(r)^{i-1} \exp\left[\int_0^t \alpha\left(f'\left(F_u\left(r\right)\right) - m\right) du\right].$$

La probabilité que $k = 1, 2 \ldots$ individus immigrent pendant l'intervalle de temps $\Delta t \approx 0$ est de : $\alpha(k+1)p_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)$.

La probabilité qu'aucun individu immigre pendant l'intervalle de temps $\Delta t \approx 0$ est de : $1 - \alpha(m - p_1)\Delta t + o(\Delta t)$.

Comportement asymptotique en temps du processus conditionné

Théorème (Athreya et Ney, 1970)

Dans le cas sous-critique et sous l'hypothèse $\sum (k \ln k) p_k < \infty$, le Q-processus associé au BGW converge en loi quand $t \to \infty$ vers la loi de Yaglom biaisée :

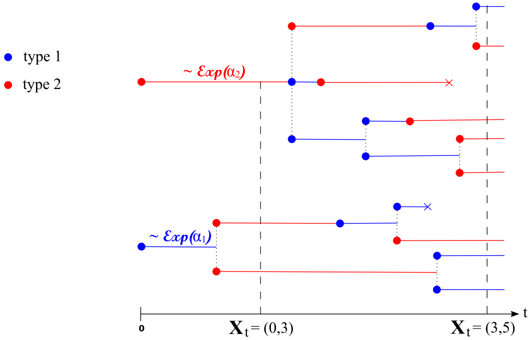
$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{t\to\infty} \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}_i \left[X_t = j | X_{t+\theta} > 0\right] = \frac{j\,\nu_j}{\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\nu_k},$$

où ν est la loi de Yaglom.

Processus de branchement multitype

d différents types d'individus $\Rightarrow$ processus $(X_{t,1}, \cdots, X_{t,d})$ à valeurs $\mathbb{N}^d$.
La dynamique est caractérisée par

- le temps de vie exponentiel de chaque individu de type i : α_i
- la loi de reproduction de chaque individu de type $i \in \{1, \cdots, d\}$: $p_i(j_1, \cdots, j_d)$= probabilité qu'un individu de type i donne naissance à j_1 individus de type 1,..., j_d individus de type d



Caractéristiques du BGW multitype

- $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, matrice moyenne de la reproduction :
  m_{ij}= nombre moyen d'individus de type j engendrés par un individu de type i
- $\mathbf{M}(t) = [m_{ij}(t)]_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, matrice moyenne du processus au temps t:
  $m_{ij}(t)$= nombre moyen d'individus de type j au temps t pour un processus de condition initiale un individu de type i

$$\mathbf{M}(t) = e^{\mathbf{A}(\mathbf{M}-\mathbf{Id})t}, \text{ où } \mathbf{A} = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_d).$$

- On supposera $\mathbf{M}$ irréductible ($\forall i, j \, \exists \, t > 0$ tel que $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_i}(X_{t,j} > 0) > 0$). Alors $\mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{Id})$ l'est aussi $\Rightarrow$ (Perron-Frobenius) $\exists \rho \in \mathbb{R}$ val. propre simple, plus grande que la partie rélle de toute autre val. propre. On notera ξ le vecteur propre à droite unitaire associé : $\mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{I})\xi = \rho \xi$
- Le processus est dit sous-critique (resp. critique) si $\rho < 0$ ($\rho = 0$). Dans ces cas-là il s'éteint p.s.

Conditionnement à la non-extinction dans un futur infiniment lointain

Proposition

Soit $\mathbf{X}_t$ *un processus de BGW multitype irréductible et (sous-)critique* $(\rho \leq 0)$ *de loi* $\mathbb{P}$. *Dans le cas* $\rho < 0$ *on suppose de plus* $\forall i$, $\mathbb{E}\left[X_{t,i} \ln X_{t,i}\right] < \infty$. *Alors on peut définir une mesure de probabilité* $\mathbb{P}^*$ *sur* $\bigvee_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t$ *par*

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall B \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{P}^*(B) := \lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}\left(B \mid \mathbf{X}_{t+\theta} \neq \mathbf{0}\right)$$

Elle satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$

$$\mathbb{P}^*_{\mathbf{i}}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\rho t} \, \frac{\mathbf{X}_t . \xi}{\mathbf{i} . \xi} \, \mathbb{P}_{\mathbf{i}}|_{\mathcal{F}_t}.$$

$\mathbb{P}^*$, loi du Q-processus, est la *h*-transformée de la loi non-conditionnée $\mathbb{P}$ via la martingale $\left(e^{-\rho t} \, \mathbf{X}_t . \xi\right)_{t \geqslant 0}$.

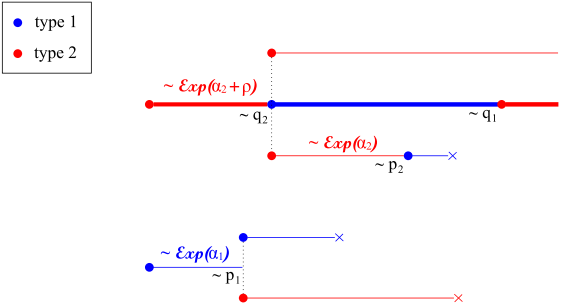
Interprétation

Proposition

processus BGW multitype conditionné à la non-extinction dans un futur infiniment lointain $\sim$ *processus non conditionné* $+$ *individu immortel*

Individu immortel reste de type i pendant un temps $\sim \mathcal{E}xp(\alpha_i + \rho)$

- puis a $\mathbf{k}$ descendants selon la loi *biaisée* $q_i(\mathbf{k}) := \frac{\alpha_i}{(\alpha_i+\rho)\xi_i}\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi}\, p_i(\mathbf{k})$
- et mute alors vers le type j avec la probabilité $\frac{k_j \xi_j}{\mathbf{k}.\boldsymbol{\xi}}$



Comportement asymptotique du processus conditionné (Q-processus)

Théorème

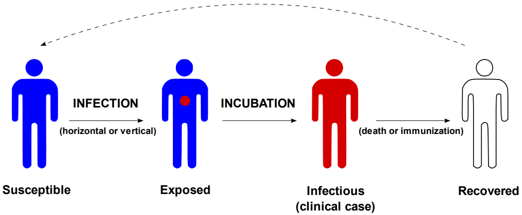
Dans le cas sous-critique et sous l'hypothèse $\mathbb{E}\left[X_{t,i} \ln X_{t,i}\right] < \infty$, *le processus BGW multitype conditionné à la non-extinction dans un futur très lointain converge en loi quand* $t \to \infty$ *vers son unique mesure de probabilité stationnaire, la loi de Yaglom biaisée :*
$\forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d \setminus \mathbf{0}$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^*_{\mathbf{i}}\left[\mathbf{X}_t = \mathbf{j}\right] = \lim_{t\to\infty} \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{i}}\left[\mathbf{X}_t = \mathbf{j} | \mathbf{X}_{t+\theta} \neq \mathbf{0}\right] = \frac{1}{C} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\xi}\ \nu(\mathbf{j}),$$

où ν *est la loi de Yaglom*

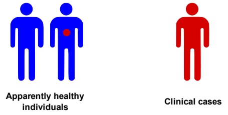
$$\nu(\mathbf{j}) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_t = \mathbf{j} | \mathbf{X}_t \neq \mathbf{0}\right).$$

Maladie SEIR



- quantification de l'infection?
- extinction de l'épidémie? temps d'extinction?
- évolution de l'épidémie en cas d'extinction très tardive?

Observations disponibles:

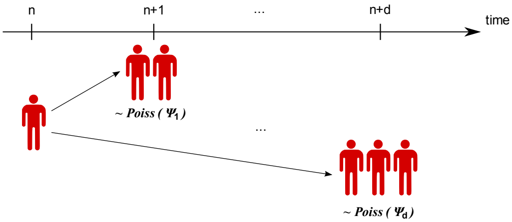


car les états de santé S et E sont souvent indifférentiables.

But: construire un modèle stochastique basé sur l'incidence des cas cliniques mais prenant en compte tous les états de santé.

Modèle limite pour une grande population initiale et une maladie rare (C. Jacob) :

le nombre de cas cliniques générés $k\,(\leq d)$ unités de temps plus tard par un seul cas clinique $\sim \mathcal{P}oiss(\Psi_k)$



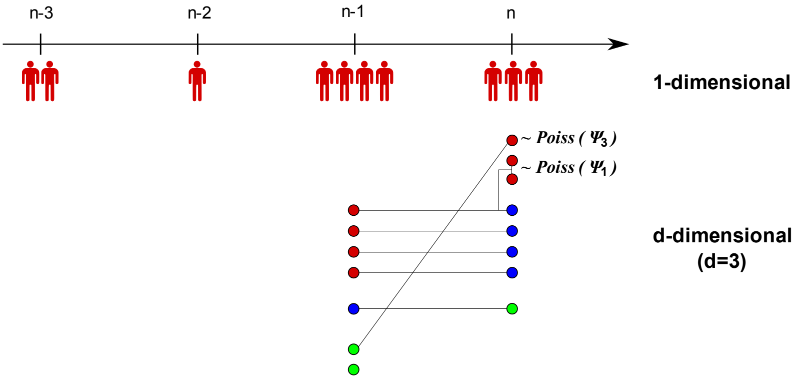
$X_n \in \mathbb{N}$, nombre de cas cliniques à l'instant n: processus d-markovien

$$\mathcal{L}(X_n | X_{n-1}, \dots, X_{n-d}) = \mathcal{P}oiss \left(\sum_{k=1}^{d} X_{n-k} \Psi_k \right)$$

$\Leftrightarrow \mathbf{X}_n := (X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-d+1}) \in \mathbb{N}^d$ markovien d-dim. :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n-1}) = \mathcal{P}oiss\left(\mathbf{X}_{n-1} \cdot \mathbf{\Psi}\right) \otimes \delta_{(X_{n-1}, \dots, X_{n-d+1})}.$$

$\mathbf{X}_n$ est un processus de branchement à d types.



Matrice moyenne ($\mathbf{M}^d > \mathbf{0}$)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Psi_{d-1} & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \Psi_d & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\rho \leqslant 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{d} \Psi_k \leqslant 1,$$

ainsi $\sum_{k=1}^{d} \Psi_k$ est un paramètre de bifurcation:

Proposition

extinction de l'épidémie $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{d} \Psi_k \leqslant 1.$

Analyse des risques du pire des cas

Scénario catastrophe : étude des trajectoires à extinction très tardive

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n = . \,|\, \mathbf{X}_{n+k} \neq \mathbf{0}\right), \quad k \text{ très grand}.$$

est approximée par

$$\mathbb{P}^*\left(\mathbf{X}_n = .\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n = . \,|\, \mathbf{X}_{n+k} \neq \mathbf{0}\right).$$

où

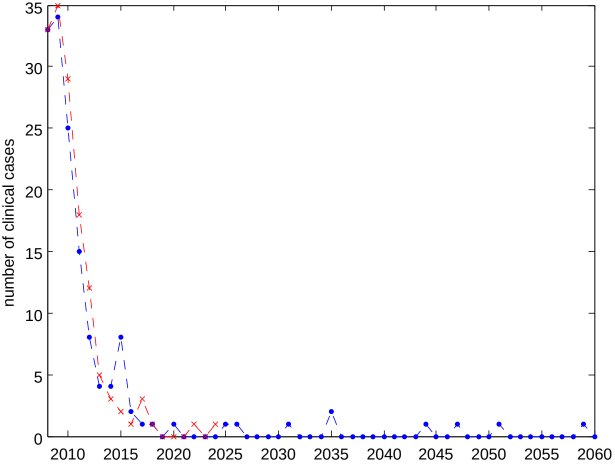
$$\mathbb{P}^*\left(\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{j} | \mathbf{X}_n = \mathbf{i}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\xi}}\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{j} | \mathbf{X}_n = \mathbf{i}\right).$$

Proposition

$$\mathbb{P}\left(X_n = \cdot | \mathbf{X}_{n-1}\right) = \mathcal{P}oiss\left(\mathbf{X}_{n-1}\cdot\boldsymbol{\Psi}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*\left(X_n = \cdot | \mathbf{X}_{n-1}\right) = \mathcal{P}oiss\left(\mathbf{X}_{n-1}\cdot\boldsymbol{\Psi}\right) * \mathcal{B}\left(\frac{\mathbf{X}_{n-1}\cdot\boldsymbol{\Psi}\,\xi_1}{\mathbf{X}_{n-1}\cdot\boldsymbol{\Psi}\,\xi_1 + \sum_{i=2}^{d} X_{n-i+1}\xi_i}\right).$$

Simulation d'une trajectoire du processus non conditionné et du proc. conditionné à l'extinction très tardive pour l'épidémie d'ESB en Grande-Bretagne (d=9).



P (extinction de l'épidémie après 2030) $\leq$ 0,025.

Convergence du BGW multitype vers une diffusion de Feller

Paramètre de renormalisation $n \in \mathbb{N}$.

- le temps de vie de chaque individu est divisé par $n \Leftrightarrow$ taux de bcht multiplié par n
- nombre initial d'individus d'ordre n mais chaque individu a un poids $\frac{1}{n}$

Théorème (Joffe et Métivier, 1986)

Si $\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{Id} + \frac{1}{n}\mathbf{C} + o(\frac{1}{n})$, $\lim_n \sigma_i^{(n)} =: \sigma_i$ *unif., alors dès que les conditions initiales renormalisées convergent, la suite de processus BGW renormalisés* ($\in \frac{1}{n}\mathbb{N}^d$) *converge vers une diffusion de Feller multitype* $\in \mathbb{R}_+^d$ *de générateur infinitésimal*

$$Gf(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} C_{ji} x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d.$$

- Cette diffusion de Feller multitype est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique d-dimensionnelle

$$dX_{t,i} = \sigma_i \sqrt{X_{t,i}}\, dB_{t,i} + \sum_{j=1}^{d} C_{ji} X_{t,j}\, dt, \quad i = 1 \dots d,$$

où $\mathbf{B}_t = (B_{t,1}, \dots, B_{t,d})$ est un mouvement brownien $\in \mathbb{R}^d$.

- Sa transformée de Laplace est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^d,\ \mathbb{E}(e^{-\mathbf{X}_t \cdot \lambda} | \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x} \cdot u_t^\lambda}$$

où

$$\begin{cases} \dfrac{du_t^\lambda}{dt} = \mathbf{C} u_t^\lambda - \dfrac{1}{2} diag(\sigma_1, \dots, \sigma_d)(u_t^\lambda)^{\odot 2} \\ u_0^\lambda = \lambda \end{cases}$$

Diffusion de Feller conditionnée

Proposition

Soit $\mathbb{P}$ la loi d'une diffusion de Feller multitype de matrice de mutation $\mathbf{C}$ *irréductible, et de vap de Perron $\rho \leqslant 0$ (et vep associé ξ) . Alors on peut définir le Q-processus $\mathbb{P}^*$ associé par*

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall B \in \mathcal{F}_t,\ \ \mathbb{P}^*(B) := \lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}\left(B \mid \mathbf{X}_{t+\theta} \neq \mathbf{0}\right).$$

Il satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbb{P}^*_{\mathbf{x}}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\rho t} \frac{\mathbf{X}_t . \xi}{\mathbf{x} . \xi}\ \mathbb{P}_{\mathbf{x}}|_{\mathcal{F}_t}.$$

C'est une conséquence d'un résultat de Champagnat et R. (2008) sur le processus de Dawson-Watanabe multitype conditionné à l'extinction infiniment tardive.

Éléments de la preuve

- Probabilité d'extinction:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_t \neq \mathbf{0}) = \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbf{x}}(e^{-\mathbf{X}_t \cdot \lambda}) = e^{-\mathbf{x} \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_\theta^\lambda}$$

-

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}_B \mid \mathbf{X}_{t+\theta} \neq \mathbf{0}) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{1}_B\left(1 - e^{-\mathbf{X}_t \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_\theta^\lambda}\right)\right)}{1 - e^{-\mathbf{x} \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_{t+\theta}^\lambda}}$$

$$\approx_{\theta \to \infty} \mathbb{E}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{1}_B \frac{\mathbf{X}_t \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_\theta^\lambda}{\mathbf{x} \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_{t+\theta}^\lambda}\right)$$

- Une étude minutieuse de la dépendance en λ et θ de u_θ^λ permet de montrer que

$$\lim_{\theta \to \infty} \frac{\lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_\theta^\lambda}{\mathbf{x} \cdot \lim_{\lambda \hookrightarrow \infty} u_{t+\theta}^\lambda} = \frac{e^{-\rho t}}{\mathbf{x} \cdot \xi} \xi.$$

Autres descriptions de la diffusion de Feller conditionnée

- C'est l'unique solution de l'EDS d-dimensionnelle

$$dX_{t,i} = \sigma_i \sqrt{X_{t,i}}\, dB_{t,i} + \sum_{j=1}^{d} C_{ji} X_{t,j}\, dt + \frac{1}{\mathbf{X}_t.\boldsymbol{\xi}} \sigma_i^2 \xi_i X_{t,i}\, dt, \quad \forall i = 1 \dots d.$$

  Pour $d = 1$ (Lambert, 2007):

$$dX_t = \sigma \sqrt{X_t}\, dB_t + cX_t\, dt + \sigma^2\, dt.$$

- C'est une diffusion de Feller avec une mutation dépendant de l'état du système, de générateur infinitésimal :
  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

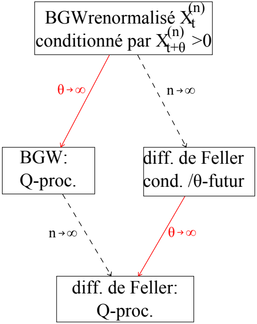
$$\begin{aligned} G^* f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} C_{ji} x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathbf{x}.\boldsymbol{\xi}} \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 x_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} C_{ji}(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Échange des limites en n et en θ

Question: Est-ce que le BGW multitype conditionné à l'extinction infiniment tardive puis renormalisé converge vers la diffusion de Feller multitype conditionnée à l'extinction infiniment tardive
$\Leftrightarrow$ peut-on inverser les limites en n et en θ?

Théorème (Pénisson)

Si la matrice $\mathbf{C}$ *est irréductible et de vap de Perron* $\rho \leqslant 0$ *, alors le diagramme suivant est commutatif:*



Esquisse de preuve

Le processus BGW renormalisé et conditionné à la non-extinction dans le futur infiniment lointain, de loi $\mathbb{P}^{n,*}$, est solution du problème de martingales:

pour tout $f \in D(G^{n,*})$, $f(\mathbf{X}_t)-f(\mathbf{X}_0)-\int_0^t (G^{n,*}f)(\mathbf{X}_{s-})ds$ est une $\mathbb{P}^{n,*}$-martingale locale

où le générateur infinitésimal $G^{n,*}$ vaut: pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \mathbf{0}$,

$$G^{n,*}f(\mathbf{x}) = n^2 \sum_{i=1}^{d} x_i \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} p_i^{(n)}(\mathbf{j}) \left[f(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{j}-\mathbf{e}_i}{n}) - f(\mathbf{x}) \right]$$

$$+ \frac{n}{\mathbf{x}.\xi} \sum_{i=1}^{d} x_i \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} p_i^{(n)}(\mathbf{j})(\mathbf{j}-\mathbf{e}_i).\xi \left[f(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{j}-\mathbf{e}_i}{n}) - f(\mathbf{x}) \right]$$

$$= n^2 \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{(n)}(\mathbf{x}) x_i \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} p_i^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{j}) \left[f(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{j}-\mathbf{e}_i}{n}) - f(\mathbf{x}) \right],$$

Esquisse de preuve

- tension de la suite des semi-martingales
- convergence $\|G^{n,*}f - Gf\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $f \in C_c^2(\mathbb{R}_+^d)$

$$G^{n,*}f(\mathbf{x}) = n^2 \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{(n)}(\mathbf{x}) x_i \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} p_i^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{j}) \left[f(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{j}-\mathbf{e}_i}{n}) - f(\mathbf{x}) \right]$$

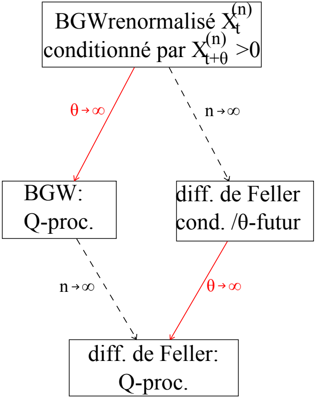
$$\Rightarrow_n G^* f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} C_{ij}(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

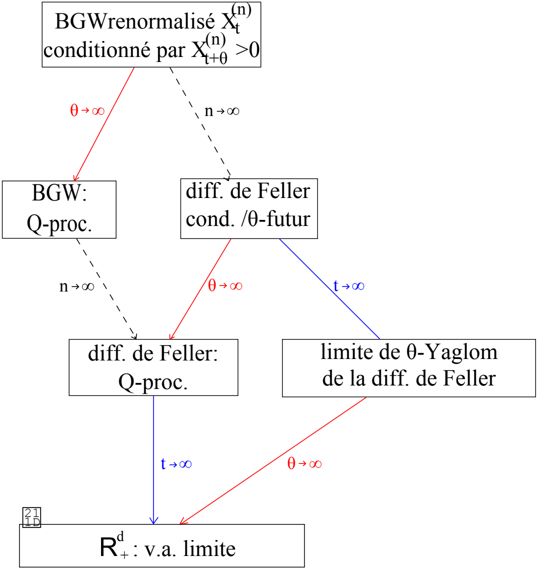
(car $n(\mathbf{M}^{(n)} - \mathbf{I}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{C} \Longrightarrow \xi^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$.)

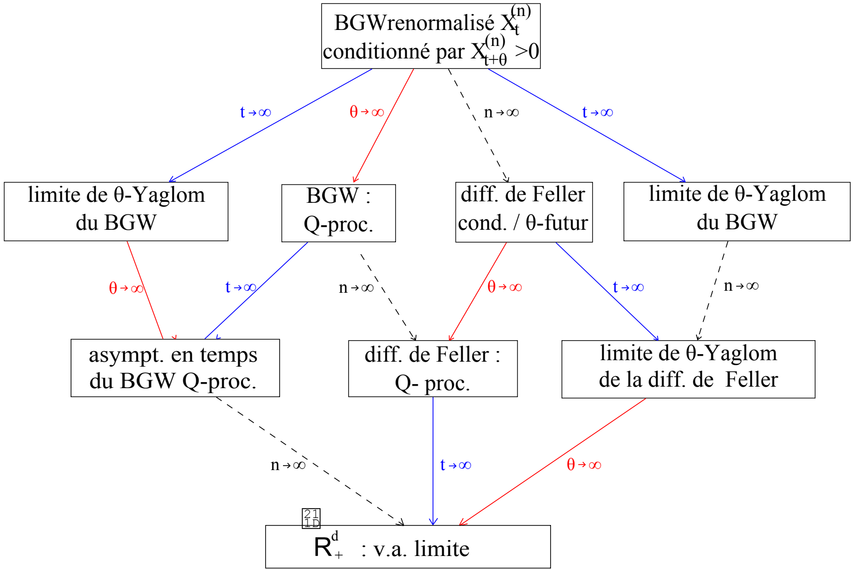
- unicité des solutions du problème de martingales

pour tout $f \in D(G^*)$, $f(\mathbf{X}_t) - f(\mathbf{X}_0) - \int_0^t (G^* f)(\mathbf{X}_s) ds$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale.

Panorama des différentes limites en n, en t et en θ




BGWrenormalisé $X_t^{(n)}$
conditionné par $X_{t+\theta}^{(n)} > 0$
$\theta \to \infty$
$n \to \infty$
BGW:
Q-proc.
diff. de Feller
cond. /θ-futur
$n \to \infty$
$\theta \to \infty$
$t \to \infty$
diff. de Feller:
Q-proc.
limite de θ-Yaglom
de la diff. de Feller
$t \to \infty$
$\theta \to \infty$
$\mathbb{R}_+^d$: v.a. limite


BGWrenormalisé $X_t^{(n)}$
conditionné par $X_{t+\theta}^{(n)} > 0$
$t \to \infty$
$\theta \to \infty$
$n \to \infty$
$t \to \infty$
limite de θ-Yaglom du BGW
BGW : Q-proc.
diff. de Feller cond. / θ-futur
limite de θ-Yaglom du BGW
$\theta \to \infty$
$t \to \infty$
$n \to \infty$
$\theta \to \infty$
$t \to \infty$
$n \to \infty$
asympt. en temps du BGW Q-proc.
diff. de Feller : Q- proc.
limite de θ-Yaglom de la diff. de Feller
$n \to \infty$
$t \to \infty$
$\theta \to \infty$
$\mathbb{R}_+^d$: v.a. limite