ANALYSE COMPLEXE

Philippe Charpentier

Université Bordeaux I

Septembre 2010

Philippe Charpentier
Université Bordeaux I
Laboratoire de mathématiques Pures
351, Cours de la Libération, 33405 TALENCE
Adresse électronique: philippe.charpentier@math.u-bordeaux1.fr

PRÉFACE

J'ai donné ce cours à l'université Bordeaux I en première année de Master durant les années universitaires 2007-08, 2008-09, 2009-10 et 2010-11. Le contenu de ce polycopié est exactement ce que j'ai traité devant les étudiants. Pour aller plus loin dans la théorie des fonction holomorphes d'une variable complexe, le lecteur pourra consulter les ouvrages cités dans le bibliographie.

Les exercices en fin de chapitre correspondent aux listes d'exercices distribuées par A. Yger au cours de l'année universitaire 2010-2011.

TABLE DES MATIÈRES

Préface **iii**

CHAPITRE I. Formes différentielles, homotopie **1**
- I.1. Définitions générales 1
- I.2. Intégration des 1-formes différentielles 4
  - I.2.1. Définitions générales et formule de Stokes 5
  - I.2.2. Indice d'un lacet par rapport à un point 7
- I.3. Homotopie 8
- I.4. Deux applications 10
  - I.4.1. Logarithme complexe 10
  - I.4.2. Quelque propriétés de l'indice 11
- Exercices 11

CHAPITRE II. Fonctions holomorphes **21**
- II.1. Définition et propriétés fondamentales 21
- II.2. Premières propriétés des fonctions holomorphes 24
- II.3. Séries de Laurent et Théorème de l'application ouverte 27
- II.4. Le Théorème de Phragmen-Lindelöf 31
- Exercices 32

CHAPITRE III. Fonctions harmoniques **41**
- III.1. La formule de Green 41
- III.2. Fonctions harmoniques et sous-harmoniques et propriété de la moyenne 42
- III.3. Le problème de Dirichlet classique dans une boule 45
- III.4. Cas particulier de la dimension 2, liens avec les fonctions holomorphes 49
  - III.4.1. Noyaux de Green et de Poisson du disque unité et fonctions harmoniques 50
  - III.4.2. Fonctions sous-harmoniques 52
  - III.4.3. Intégrale de Poisson et fonctions holomorphes 53
- Exercices 53

CHAPITRE IV. Théorème de Runge, équations de Cauchy-Riemann et Théorème de Weierstrass **59**
- IV.1. Théorème de Runge et enveloppes d'holomorphie 59
- IV.2. Résolution $\mathscr{C}^\infty$ des équations de Cauchy-Riemann 62
- IV.3. Le Théorème de Weierstrass 64
  - IV.3.1. Première démonstration du Théorème de Weierstrass 65
  - IV.3.2. Produits infinis de fonctions holomorphes 65
  - IV.3.3. Les facteurs élémentaires de Weierstrass 67
  - IV.3.4. La sphère de Riemann 68
  - IV.3.5. Seconde démonstration du Théorème de Weierstrass 69
- Exercices 70

CHAPITRE V. Transformations biholomorphes, Théorème de Riemann **75**
- V.1. Généralités 75
- V.2. Exemples de groupes d'automorphismes 76
  - V.2.1. Le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ 76
  - V.2.2. Le groupe des automorphismes de la sphère de Riemann 76
  - V.2.3. Le groupe des automorphismes du disque unité $\mathbb{D}$ 77
- V.3. Le Théorème de Riemann 77
- V.4. Régularité au bord des transformations conformes 79
- Exercices 81

CHAPITRE VI. Prolongement analytique, fonctions modulaires, Théorème de Picard **85**
VI.1. Le cas des séries entières . . . 85
VI.2. Le Théorème de Monodromie . . . 86
VI.3. Fonctions modulaires . . . 87
VI.4. Le Théorème de Picard . . . 90
VI.4.1. Un Théorème de Landau et un Thèorème de Bloch . . . 90
VI.4.2. Un Théorème de Schottky . . . 91
VI.4.3. Démonstration du Grand Théorème de Picard . . . 92
Exercices . . . 93

Annexe **97**

CHAPITRE A. Intégration en polaires **97**
A.1. Mesure euclidienne (ou invariante) sur une sphère . . . 97
A.2. Intégration en polaires . . . 98

CHAPITRE B. Mesure euclidienne sur une sous-variété différentiable. Intégration par « tranches » **101**
B.1. Cas des sous-variétés paramétrées . . . 101
B.2. Cas général . . . 102

Index **104**

Bibliographie **107**

CHAPITRE I

FORMES DIFFÉRENTIELLES HOMOTOPIE

I.1 Définitions générales

DÉFINITION I.1.1.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme différentielle de degré* 1 (ou 1*-forme différentielle*) sur U une application f de U dans l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Précisément, si $a \in \mathbb{R}^n$ et $x \in U$, on a $\langle f(x), a\rangle = \sum_{i=1}^n f_i(x)a_i$. En d'autres termes, si on note $(dx_i)_i$ la base canonique de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\langle dx_i, a\rangle = a_i$), on a $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)dx_i$, et on note donc $f = \sum_{i=1} f dx_i$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si les fonctions f_i sont de classe $\mathscr{C}^k$.

DÉFINITION I.1.2.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *champ de vecteurs* sur U une application $X = (X_i)_{i=1}^n$ de U dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si les fonctions X_i (de U dans $\mathbb{R}$) sont de classe $\mathscr{C}^k$.

Les 1-formes différentielles $f = \sum_{i=1}^n f dx_i$ et les champs de vecteurs $X = (X_i)_{i=1}^n$ sont mis en dualité par la formule

$$\langle f, X\rangle (x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)X_i(x).$$

Exemple I.1.1 (Exemple fondamental). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $x \in U$, soit $df(x)$ la différentielle de f au point x. Alors l'application $x \mapsto df(x)$ est une 1-forme différentielle appelée la *différentielle extérieure* de f.

DÉFINITION I.1.3.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi = (\varphi_i)_i : U \to V$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\omega = \sum \omega_i dx_i$ une 1-forme différentielle sur V. On appelle *image réciproque* de ω par φ la 1-forme différentielle $\varphi^*\omega$ définie sur U par

$$\varphi^*\omega = \sum_i (\omega_i \circ \varphi)\, d\varphi_i$$

où $d\varphi_i$ est le différentielle extérieure de φ_i. En particulier, si $\omega = dg$ est la différentielle extérieure d'une fonction g alors $\varphi^*\omega = d(g \circ \varphi)$ (i.e. $\varphi^* \circ \omega$ est la différentielle extérieure de $g \circ \varphi$).

Avant de définir les p-formes différentielles, nous faisons quelque rappels sur les formes p-multilinéaires alternées. Nous notons $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace de ces formes sur $\mathbb{R}^n$. Si $T \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ et si v_i, $1 \le i \le p$, sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$T(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{sign}(\sigma) T\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}\right),$$

pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,p\}$.

Si $S \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$, on appelle *produit extérieur* de S par T, noté $S \wedge T$, la forme $p+q$-multilinéaires alternée définie par : si $(v_1,\ldots,v_p,v_{p+1},\ldots,v_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$,

$$S \wedge T\,(v_1,\ldots,v_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) S\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}\right) T\left(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}\right),$$

où la somme est étendue à toutes les permutations σ de $\{1,\ldots,p+q\}$ telles que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)$. On vérifie facilement que l'on a aussi

$$S \wedge T\,(v_1,\ldots,v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) S\left(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}\right) T\left(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q)}\right),$$

où, cette fois-ci, la somme est étendue à toutes les permutations. De même, la vérification des propriétés citées dans la Proposition qui suit ne pose pas de difficulté :

PROPOSITION I.1.1.

Soient $S \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $T \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$ et $R \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$.

1. $S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S$.
2. $(S \wedge T) \wedge R = S \wedge (T \wedge R)$.
3. $S \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $S \wedge S = 0$.
4. *Si f_i, $1 \le i \le p$, sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour $v_i \in \mathbb{R}^n$*

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\,(v_1,\ldots,v_p) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) f_1\left(v_{\sigma(1)}\right) \ldots f_p\left(v_{\sigma(p)}\right),$$

c'est-à-dire $f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\,(v_1,\ldots,v_p) = \det\left(f_i\left(v_j\right)\right)$.

5. *Toute forme $S \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ s'écrit, de manière unique,*

$$S = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} c_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

ce qui signifie que les p-formes alternées $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, forment une base de l'espace vectoriel $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. On les note dx^I où $I = (i_1,\ldots,i_p)$.

Pour simplifier les notation, la somme $\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n}$ sera généralement notée $\sum'_I$ avec $I = (i_1,\ldots,i_p)$.
On remarquera que, pour $p > n$, $\Lambda^p(\mathbb{R}^n) = 0$ et que $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ est de dimension 1.

DÉFINITION I.1.4.

On appelle forme *différentielle de degré p* (ou *p-forme différentielle*) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ une application ω de U dans $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. Elle s'écrit donc de manière unique

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_I{}' \omega_I(x) dx^I.$$

On dit que ω est de classe $\mathscr{C}^k$ si les fonctions ω_I sont classe $\mathscr{C}^k$. Nous noterons $A^p(U)$ l'espace des p-formes différentielles sur U et $A_k^p(U)$ l'espace de celles qui sont de classe $\mathscr{C}^k$.

Les p-formes différentielles sont mises en dualité avec les p-champs de vecteurs : si ω est une p-forme et $X = (X_1,\ldots,X_p)$ un p-tuple de champs de vecteurs, la relation de dualité est

$$\langle \omega, X \rangle (x) = \omega\left(X_1,\ldots,X_p\right)(x) = \omega(x)\left(X_1(x),\ldots,X_p(x)\right) = \sum_I{}' \omega_I(x) \left(X(x)\right)^I.$$

DÉFINITION I.1.5.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi = (\varphi_i)_i : U \to V$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\omega = \sum'_I \omega_I dx^I$ une p-forme différentielle sur V. On appelle *image réciproque* de ω par φ la p-forme différentielle $\varphi^*\omega$ définie sur U par

$$\varphi^*\omega = \sum_I{}' \left(\omega_I \circ \varphi\right) (d\varphi)^I,$$

où $(d\varphi)^I = d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}$ si $I = (i_1,\ldots,i_p)$.

DÉFINITION I.1.6.

Soit $\omega = \sum'_I \omega_I dx^I$ une p-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle *différentielle extérieure* de ω la $p+1$-forme différentielle $d\omega$ définie par

$$d\omega = \sum_I{}' d\omega_I \wedge dx^I.$$

On remarquera que cette Définition prolonge celle donnée pour les fonctions (Exemple I.1.1).

PROPOSITION I.1.2.

La différentiation extérieure d vérifie les propriétés suivantes :

1. *d est linéaire.*
2. *Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, on a $d(df) = d^2 f = 0$.*
3. *Si $\omega_1 \in A_1^p(U)$ et $\omega_2 \in A_1^q(U)$, alors $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.*

Démonstration. Vérifions 2. : la Définition donne aussitôt $d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$, et comme $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, la conclusion résulte du Théorème de Schwarz. Montrons maintenant le 3. Par linéarité, il suffit de le faire lorsque $\omega_1 = adx^I$ et $\omega_2 = bdx^J$:

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(ab)dx^I \wedge dx^J \\ &= (bda + adb) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \left(da \wedge dx^I\right) \wedge bdx^J + adb \wedge dx^T \wedge dx^J \\ &= \left(da \wedge dx^I\right) \wedge bdx^J + (-1)^p adx^I \wedge bdx^J \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \end{aligned}$$

puisque $d\left(dx^I\right) = d\left(dx^J\right) = 0$ par définition de la différentielle extérieure. □

PROPOSITION I.1.3.

Le carré de la différentielle extérieure est nul : $d^2 = 0$.

Démonstration. En effet, si $\omega = \sum'_I \omega_I dx^I$, on a, par définition, $d\omega = \sum'_I d\omega_I \wedge dx^I$ et

$$d^2\omega = \sum_I{}' \left(d\left(d\omega_I\right) \wedge dx^I + d\omega_I \wedge d\left(dx^I\right)\right) = 0,$$

puisque la Proposition précédente implique $d^2\omega_I = 0$ (et que $d\left(dx^I\right) = 0$). □

PROPOSITION I.1.4.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi = (\varphi_i)_i : U \to V$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\omega = \sum'_I \omega_I dx^I$ une p-forme différentielle sur V. Alors $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

Démonstration. En effet, la définition de $\varphi^*\omega$ montre que $\omega \mapsto \varphi^*\omega$ est un homomorphisme d'algèbre lorsque l'on munit l'espace des formes du produit extérieur. Il suffit dons de vérifier la formule pour les fonctions (ce qui a été remarqué à la Définition I.1.3) et pour les 1-formes ce qui se fait aisément. □

DÉFINITION I.1.7.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une forme $\omega \in A_1^p(U)$ est dite *fermée* si $d\omega = 0$. Une forme $\omega \in A^p(U)$, $p \geq 1$, est dite *exacte sur* U s'il existe une forme $u \in A^{p-1}(U)$ telle que $du = \omega$. Une forme $\omega \in A^p(U)$, $p \geq 1$, est dite *localement exacte sur* U si, pour tout point x de U, il existe un voisinage $V(x)$ de x dans U tel que la restriction de ω à $V(x)$ est exacte.

Comme $d^2 = 0$ toute forme *de classe* $\mathscr{C}^1$ localement exacte est fermée (noter que cette affirmation n'a pas de sens pour une forme localement exacte seulement *continue*!). Nous allons voir tout de suite que la réciproque est vraie. Par contre, en général, une forme fermée n'est pas toujours exacte sur U : ceci dépend de la topologie de U. Nous caractériserons un peu plus loin les ouverts de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels cette propriété est vraie (l'étude générale dans $\mathbb{R}^n$ fait partie d'un cours de topologie algébrique, nous ne l'aborderons pas ici). Dans le cas général, nous nous contentons de donner une formule classique simple qui permet de construire une solution de l'équation $du = \omega$ lorsque l'ouvert U est étoilé.

Rappelons que l'on dit qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est *étoilé par rapport à un de ses points* a si, pour tout $x \in U$, le segment $[a,x]$ est contenu dans U. Par exemple un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

PROPOSITION I.1.5.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à un de ses points a. Alors toute p-forme, $p \geq 1$, de classe $\mathscr{C}^1$ fermée sur U est exacte sur U. Plus précisément, en supposant $a = 0$ pour simplifier les notations, si, pour toute forme $\omega \in A_1^p(U)$, on définit la $(p-1)$-forme $k(\omega)$ par

$$\left\langle k(\omega)(x), (\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \right\rangle = \int_0^1 t^{p-1} \left\langle \omega(tx), (x, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \right\rangle dt,$$

on a :

1. *si $\omega = df$, $f \in \mathscr{C}^1(U)$, $k(df) = f - f(0)$,*
2. *en général, $d(k(\omega)) + k(d\omega)$=$\omega$, et, en particulier, $d(k(\omega)) = \omega$ si ω est fermée.*

En particulier, toute forme fermée sur un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ est localement exacte (une boule euclidienne étant convexe donc étoilée).

Démonstration. La vérification du 1. est immédiate :

$$\begin{aligned} k(df)(x) &= \int_0^1 \langle df(tx), x \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i \, dt = f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant le 2. uniquement pour les 1-formes pour simplifier les calculs (c'est le seul cas que nous utiliserons pour la théorie des fonctions holomorphes). Par linéarité, il suffit de les formes s'écrivant $\omega(x) = a(x)dx_1$. Alors $d\omega = \sum_{j\geq 2} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1$ et il vient

$$d(k(\omega)) = \sum_{j \geq 1} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_j}(tx) t x_1 \, dt \right) dx_j + \left(\int_0^1 a(tx) \, dt \right) dx_1,$$

$$\begin{aligned} \langle k(d(\omega)), \xi \rangle &= \int_0^1 t \sum_{j\geq 2} \frac{\partial a}{\partial x_j}(tx) \left\langle dx_j \wedge dx_1, (x, \xi) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j\geq 2} \frac{\partial a}{\partial x_j}(tx) \left(x_j \xi^1 - \xi^j x_1 \right) dt, \end{aligned}$$

donc

$$k(d\omega)(x) = \int_0^1 t \sum_{j\geq 2} \frac{\partial a}{\partial x_j}(tx) \left(x_j dx_1 - x_1 dx_j \right) dt,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d(k(\omega)) + k(d\omega) &= \int_0^1 \left(\sum_{j\geq 2} \frac{\partial a}{\partial x_j}(tx) t x_j dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_1}(tx) t x_1 dx_1 \right) dt + \left(\int_0^1 a(tx) \, dt \right) dx_1 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial (t a(tx))}{\partial t} dt \right) dx_1 = a(x) dx_1 = \omega. \end{aligned}$$

□

I.2 Intégration des 1-formes différentielles

I.2.1 Définitions générales et formule de Stokes

Rappelons tout d'abord que l'on appelle *chemin* (*orienté*) $\mathscr{C}^k$ par morceaux dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ une application *continue* γ d'un segment $[a,b]$ dans U telle qu'il existe une subdivision t_k, $0 \leq k \leq m$, de $[a,b]$ telle que la restriction de γ à tout segment $[t_k, t_{k+1}]$ soit de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, si $\varphi : [a', b'] \to [a,b]$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme, on dit que $\lambda = \gamma \circ \varphi$ est un autre paramétrage du chemin γ, φ étant le changement de paramètre. Un changement de paramètre φ est dit *admissible* si $\varphi' > 0$ (ce qui signifie, géométriquement, qu'il ne change pas l'orientation de γ).

Un chemin est dit *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Un chemin fermé est aussi appelé un *lacet*.

DÉFINITION I.2.1.

Soit γ un chemin (orienté) $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

1. On appelle *longueur* de γ le nombre $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)^2\right)^{1/2} dt$.
2. Soit ω une 1-forme continue sur U. On appelle *intégrale de ω le long de γ* le nombre

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* \omega = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\right) dt.$$

De plus si φ est un changement de paramètres de γ et $\lambda = \gamma \circ \varphi$, on a $\int_\lambda \omega = \int_\gamma \omega$ si φ est admissible, $\int_\lambda \omega = -\int_\gamma \omega$ sinon.

Par exemple, pour $\omega = df$, on a $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

THÉORÈME I.2.1.

*Soit U un ouvert **connexe** de $\mathbb{R}^n$. Soit ω une 1-forme différentielle **continue** dans U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U ayant même origine et même extrémité alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$;*
2. *Si γ est un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U alors $\int_\gamma \omega = 0$;*
3. *ω est exacte dans U.*

Démonstration. En effet, tout d'abord, en mettant « bout-à-bout » γ_1 et γ_2, on voit aussitôt que 1. et 2. sont équivalents, ensuite, il est clair que 3. implique 1. et 2. Montrons donc que 2. implique 3. Soit x_0 un point quelconque de U. Comme U est supposé connexe, il est connexe par arc, pour tout $x \in U$ un existe un chemin continu γ_x de classe $\mathscr{C}^1$, dans U, joignant x_0 à x. On pose alors

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

après avoir remarqué que, compte tenu de l'hypothèse 1., cette intégrale est indépendante du chemin γ_x, contenu dans U et joignant x_0 à x choisit, et ainsi la fonction f est bien définie. Soit alors $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|$ suffisamment petit de sorte que la boule fermée de centre x et de rayon $\|h\|$ soit contenue dans U, et soit $\gamma_h(t) = x + th$ le segment joignant x à $x+h$. En mettant « bout-à-bout » γ_x et γ_h, il vient aussitôt $f(x+h) - f(x) = \int_{\gamma_h} \omega = \int_0^1 \left(\sum_i h_i \omega_i(x+th)\right) dt$. Comme ω est supposée continue, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\omega_i(x+th) - \omega(x)| \leq \varepsilon$ pour $\|h\| \leq \eta$. Par suite l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|f(x+h) - f(x) - \langle \omega(x), h\rangle| = \left|\int_0^1 \left(\sum_i h_i \left(\omega_i(x+th) - \omega_i(x)\right)\right) dt\right| \leq \varepsilon \|h\|$, pour $\|h\| \leq \eta$, ce qui montre que $df(x) = \omega(x)$. □

THÉORÈME I.2.2.

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ω une 1-forme différentielle **continue** sur Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout triangle fermé Δ contenu dans Ω on a $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$;*
2. *Pour tout rectangle fermé Δ contenu dans Ω on a $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$;*
3. *ω est localement exacte dans Ω.*

Démonstration. Il est clair que 1. implique 2. en découpant un rectangle en deux triangles avec une diagonale. D'autre part, si Δ est un triangle fermé contenu dans Ω, on peut découper Δ en quatre triangles en utilisant les milieux des cotés de Δ. En répétant cette opération un certain nombre de fois, pour tout $\varepsilon > 0$, on découpe Δ en triangles Δ_i, d'intérieurs deux à deux disjoints qui sont chacun contenu dans un disque centré en un point de Δ et de rayon ε. Par compacité, sous l'hypothèse 3., on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que sur chacun de ces disques ω admet une primitive. Alors, pour chaque i, $\int_{\partial\Delta_i} \omega = 0$, et comme $\int_{\partial\Delta} \omega = \sum_i \int_{\partial\Delta_i} \omega$ on a $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$, ce qui montre que 3. implique 1.

Reste à voir que 2. implique 3. Soit $D\left(x^0, r\right)$ un disque ouvert contenu dans Ω. Pour chaque point $x = (x_1, x_2)$ contenu dans $D\left(x^0, r\right)$ considérons le chemin γ_x réunion des segments $\left[x^0, \left(x_1, x_2^0\right)\right]$ et $\left[\left(x_1, x_1^0\right), x\right]$ et posons $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$. Si $x+h \in D\left(x^0, r\right)$, soit γ_h la juxtaposition des segments $[x, (x_1+h_1, x_2)]$ et $[(x_1+h_1, x_2), x+h]$. L'hypothèse 2. implique alors que $f(x+h) =$

$f(x)+\int_{\gamma_h}\omega$, soit (en notant $\omega=\omega_1 dx_1+\omega_2 dx_2$), puisque ω est continue

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \int_0^1 \omega_1(x_1+th_1,x_2)\,h_1\,dt+\int_0^1 \omega_2(x_1+h_1,x_2+th_2)\,h_2\,dt \\ &= \omega_1(x)h_1+\omega_2(x)h_2+\mathrm{o}(|h|), \end{aligned}$$

ce qui montre que $df=\omega$. □

DÉFINITION I.2.2.
Soit $\gamma:[a,b]\to U$ un chemin dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que γ est *régulier* au point $t_0\in[a,b]$ si le gradient de γ au point t_0, $\nabla\gamma(t_0)$, est non nul. γ est dite régulière si elle est régulière en tout point de $[a,b]$.

On appelle *courbe lisse de classe* $\mathscr{C}^k$ un chemin régulier $\gamma:[a,b]\to U$ de classe $\mathscr{C}^k$ tel que :

1. Si $\gamma(a)\neq\gamma(b)$, γ est injective ;
2. Si $\gamma(a)=\gamma(b)$, γ est injective sur $]a,b[$, $\gamma^{-1}(\gamma(a))=\{a,b\}$ et toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k de γ coïncident en a et en b.

On appelle *compact à bord orienté* de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux dans $\mathbb{R}^2$ un compact K dont la frontière est une union finie de courbes lisses de classe $\mathscr{C}^k$ deux à deux disjointes à l'exception faite de leurs extrémités. De plus K est dit positivement orienté si, pour chaque courbe γ composant le bord ∂K de K lorsque l'on parcourt $\gamma(t)$ dans le sens des t croissant on a à sa gauche les points intérieurs de K, c'est-à-dire si $\nabla\gamma$ est *directement* orthogonal à la normale sortante de∂K.

Avec cette définition, si ω est une 1-forme différentielle définie au voisinage d'un compact à bord orienté K dont le bord est la réunion (« disjointe ») des courbes lisses γ_i, $1\le i\le k$, on défini l'intégrale de ω sur le bord ∂K de K par $\int_{\partial K}\omega=\sum_{i=1}^k\int_{\gamma_i}\omega$.

D'autre part, si ω est une 2-forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, elle s'écrit de manière unique $\omega=f(x)dx_1\wedge dx_2$, (x_1,x_2) étant les coordonnées canoniques. Pour toute partie mesurable F de U on pose alors $\int_F\omega=\int_F f\,d\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue (orientation du plan).

THÉORÈME I.2.3 (Formule de Stokes dans $\mathbb{R}^2$).
Soit K un compact à bord orienté de $\mathbb{R}^2$. Pour toute 1-forme différentielle ω de classe $\mathscr{C}^1$ définie au voisinage de K on a

$$\int_{\partial K}\omega=\int_K d\omega.$$

Remarque. Cette formule se généralise bien sûr aux compacts de $\mathbb{R}^n$ et, plus généralement aux compacts dans les variétés différentielles. Nous nous contentons ici du cas $\mathbb{R}^2$ pour éviter d'avoir à définir l'orientation des variétés différentielles qui est nécessaire pour énoncer la formule en général.

Démonstration. On commence par vérifier la formule lorsque K est une carré, $K=[a,b]^2$, et, avec les notations usuelles (x,y) pour les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, $\omega=\omega_1dx+\omega_2dy$ donc $d\omega=\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy$ et$\int_K d\omega=\int_{[a,b]}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)dxdy$. D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{\partial K}\omega &= \int_a^b\omega_1(x,a)\,dx+\int_a^b\omega_2(b,y)\,dy+\int_b^a\omega_1(x,b)\,dx+\int_b^a\omega_2(a,y)\,dy \\ &= \int_a^b(\omega_1(x,a)-\omega_1(x,b))\,dx+\int_a^b(\omega_2(b,y)-\omega_2(a,y))\,dy \\ &= \int_a^b\left(\int_a^b\frac{\partial\omega_2}{\partial x}dx\right)dy-\int_a^b\left(\int_a^b\frac{\partial\omega_1}{\partial y}dy\right)dx, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat dans ce cas.

Pour le cas général, pour chaque entier $n\ge1$, on découpe le plan en carrés de côtés parallèles aux axes avec les droites d'équations $x=\frac{k}{2^n}$, $y=\frac{l}{2^n}$, $k,l\in\mathbb{Z}$. On note K_n la réunion de ces carrés contenus dans l'intérieur de K et L_n la réunion de ceux qui coupent le bord de K. Si C_1 et C_2 sont deux tels carrés ayant un côté en commun, on vérifie aussitôt que $\int_{\partial C_1}\omega+\int_{\partial C_2}\omega=\int_{\partial(C_1\cup C_2)}\omega$, et la formule pour un carré donne donc $\int_{\partial K_n}\omega=\int_{K_n}d\omega$. Pour conclure, il suffit donc de montrer les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{K_n}d\omega=\int_K d\omega, \tag{I.1}$$

et,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial K_n}\omega=\int_{\partial K}\omega. \tag{I.2}$$

Comme ω est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de K, $d\omega$ est bornée sur K et il existe une constante $C>0$ telle que $\left|\int_K d\omega-\int_{K_n}d\omega\right|\le C\lambda(L_n)$ (λ mesure de Lebesgue), et, pour vérifier (I.1), il suffit de voir que $\lim_{n\to+\infty}\lambda(L_n)=0$:

Lemme. *Il existe une constante $B > 0$, indépendante de n, telle que le volume de L_n est majoré par $B2^{-n}$. De plus, il existe une constante A, indépendante de n, telle que le nombre de carrés composant L_n est majoré par $A2^n$.*

Preuve du Lemme. Soit $T_n = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \operatorname{dist}(x, \partial K) \leq \sqrt{2}2^{-n}\right\}$. Comme ∂K est un compact réunion d'un nombre fini de courbes lisses γ_i, il existe une constante B, indépendante de n (en fait $2\sqrt{2}$ fois la somme des longueurs des courbes γ_i) telle que le volume de T_n est majoré par $B2^{-n}$, ce qui montre la première assertion du Lemme. Enfin la seconde en résulte puisque L_n est réunion de carrés d'intérieurs deux à deux disjoints et de volumes 2^{-2n}. □

Vérifions maintenant (I.2). Pour chaque carré C composant L_n, soit Γ_C la partie de ∂C contenue dans l'intérieur de K et *orientée négativement*, et soit x_C un point de $C \cap K$. Un rapide dessin montre aisément que $\sum_C \int_{\Gamma_C} \omega = \int_{\partial K_n} \omega$, la somme étant étendue à tous les carrés C composant L_n. Par ailleurs, comme ω est de classe $\mathscr{C}^1$, si on pose $\omega_C = \omega_1(x_C)\,dx + \omega_2(x_C)\,dy$ et $\omega = \omega_C + \varepsilon_C$, on a $|\varepsilon_C| = \mathrm{O}(2^{-n})$, avec une constante indépendante de n. De plus, comme ω_C est à coefficients constants, elle est exacte et son intégrale sur le bord de $C \cap K$ est nulle, c'est-à-dire (compte tenu de l'orientation négative de Γ_C) $\int_{\Gamma_C} \omega_C = \int_{\partial K \cap C} \omega_C$. Ainsi, il vient

$$\int_{\partial K \cap C} \omega - \int_{\Gamma_C} \omega = \int_{\partial K \cap C} \varepsilon_C - \int_{\Gamma_C} \varepsilon_C$$

et il existe une constante $D > 0$ indépendante de n telle que $\left|\int_{\partial K \cap C} \omega - \int_{\Gamma_C} \omega\right| \leq D2^{-2n}$ (les longueurs de $\partial K \cap C$ et Γ_C étant $\mathrm{O}(2^{-n})$). En sommant sur tous les carrés C composant L_n, le Lemme donne $\left|\int_{\partial K} \omega - \int_{\partial K_n} \omega\right| \leq E2^{-n}$ pour une constante E indépendante de n, ce qui achève la démonstration du Théorème. □

Nous introduisons maintenant des notation propres au plan complexe $\mathbb{C}$ que nous utiliseront constamment par la suite : (x, y) étant les coordonnées canoniques usuelles de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$dz = dx + i dy \text{ et } d\bar{z} = dx - i dy,$$

et toute 1-forme différentielle ω sur un ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $\omega = \omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}$ et que $dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$. Par ailleurs si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$, sa différentielle extérieure s'écrit de manière unique

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

et on vérifie immédiatement que $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

PROPOSITION I.2.1 (Formule de Cauchy-Pompeïu).

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit K un compact à bord orienté contenu dans Ω. Alors pour tout point $z_0 \in \overset{\circ}{K}$

$$2i\pi f(z_0) = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2i \int_K \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z - z_0} d\lambda(z).$$

Démonstration. Soit $D(z_0, r)$ le disque ouvert centré en z_0 et de rayon r. On suppose r assez petit de sorte que l'adhérence de ce disque soit contenu dans l'intérieur de K. La Formule de Stokes appliquée au compact à bord orienté $K \setminus \overline{D(z_0, r)}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{K \setminus \overline{D(z_0, r)}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z - z_0} d\bar{z} \wedge dz = 2i \int_K \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z - z_0} d\lambda(z).$$

Comme

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\vartheta}\right)}{re^{i\vartheta}} ire^{i\vartheta} d\vartheta = 2i\pi f(z_0),$$

la formule s'obtient en passant à la limite quand $r \to 0$. □

I.2.2 *Indice d'un lacet par rapport à un point*

DÉFINITION I.2.3.

Soit γ un lacet (i.e. un chemin fermé) de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{Im}\gamma$ l'image de γ. On appelle *indice de γ par rapport à un point $a \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$* le nombre

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

PROPOSITION I.2.2.

L'indice $I(\gamma,a)$ d'un lacet γ par rapport à un point $a \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}\gamma$ est un entier relatif (i.e. $I(\gamma,a)\in\mathbb{Z}$).

Démonstration. En effet, supposons, pour fixer les notations $\gamma : [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$, et posons

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}ds\right).$$

La Proposition dit que $\varphi(\beta)=1$. Or, excepté au points où γ n'est pas dérivable (c'est-à-dire pour un nombre fini de valeurs de t) on a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a},$$

c'est-à-dire $\left(\frac{\varphi}{\gamma-a}\right)'(t)=0$. Comme $\frac{\varphi}{\gamma-a}$ est continue, cela signifie qu'elle est constante, et comme $\varphi(\alpha)=1$, on a $\varphi(t)=\frac{\gamma(t)-a}{\gamma(\alpha)-a}$. Comme γ est un lacet ($\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$) on a bien $\varphi(\beta)=1$. □

PROPOSITION I.2.3.

Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$.

1. *$I(\gamma,a)$ est constant dans chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}\gamma$;*
2. *Si γ est la frontière d'un compact à bord orienté, alors $I(\partial K,a)=1$ pour $a\in\overset{\circ}{K}$ et $I(\partial K,a)=0$ pour $a\in\mathbb{C}\setminus K$.*

Démonstration. Le 1. résulte de la Proposition précédente puisque $a\mapsto I(\partial K,a)$ est clairement continue dans $\overset{\circ}{K}$. Si $a\in\overset{\circ}{K}$, la forme $\frac{dz}{z-a}$ est fermée au voisinage du compact $K\setminus D(a,r)$ où $D(a,r)$ est un disque ouvert contenu dans l'intérieur de K. La formule de Stokes donne alors $\int_{\partial(K\setminus D(a,r))}\frac{dz}{z-a}=0$, donc $I(\gamma,a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)}\frac{dz}{z-a}=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} i\,d\vartheta=1$. Lorsque $a\in\mathbb{C}\setminus K$, la forme $\frac{dz}{z-a}$ est fermée au voisinage de K et la formule de Stokes donne $I(\gamma,a)=0$. □

I.3 *Homotopie*

DÉFINITION I.3.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins continus dans Ω que l'on suppose paramétrés sur $I=[0,1]$. On dit que γ_1 et γ_2 sont *homotopes* (*avec extrémités fixes*) s'il ont même origine et même extrémité et s'il existe une application *continue* $\delta : I\times I\to\Omega$ telle que :

1. Pour tout $t\in I$, $\delta(t,0)=\gamma_1(t)$ et $\delta(t,1)=\gamma_2(t)$;
2. Pour tout $u\in I$, $\delta(0,u)=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$ et $\delta(1,u)=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$.

Dans le cas où γ_1 et γ_2 sont des chemins fermés (i.e. $\gamma_1(0)=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)=\gamma_2(1)$) on dit aussi que les chemins sont *homotopes* (*comme chemins fermés*) (dans ce cas on a $\delta(0,u)=\delta(1,u)=\gamma_1(0)$, $\forall u\in I$).

De plus, on dit qu'un chemin fermé γ (i.e. $\gamma(0)=\gamma(1)=a$) est *homotope à un point*s'il est homotope (comme chemin fermé) a un chemin constant $\gamma_1(t)=a$, $t\in I$.

Dans toute la suite, nous dirons simplement « homotopes » sous-entendant « avec extrémités fixes » ou « comme chemins fermés ».

On remarquera que l'homotopie ainsi définie dépends de l'ouvert Ω dans lequel on considère les chemins. Par exemple le chemin $t\to e^{it}$ est homotope à un point dans $\mathbb{C}$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{C}^*$.

Pour simplifier les notations, dans toute la suite les chemins seront supposés paramétrés sur $I=[0,1]$ sauf précision contraire.

DÉFINITION I.3.2.

Soit ω une 1-forme *continue localement exacte* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit γ un chemin *continu* dans Ω. On dit qu'une fonction *continue* $f : I=[0,1]\to\mathbb{C}$ est une *primitive de ω le long de γ* si $\forall t_0\in I$ il existe un voisinage $V=V(\gamma(t_0))$ de $\gamma(t_0)$ dans Ω et une fonction $F=F_{t_0}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dans V telle que $dF=\omega$ dans V et $f(t)=F\circ\gamma(t)$ au voisinage de t_0.

On notera que cette Définition s'applique en particulier aux formes ω fermées puisque celles-ci sont localement exactes (Proposition I.1.5). De plus, si $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dz_i$, et si γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors une primitive f de ω le long de γ est aussi $\mathscr{C}^1$ par morceaux et la définition de f donnée dans la Définition ci-dessus équivaut à « f de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et, $\forall t_0 \in I$, $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)$ au voisinage de t_0 ».

PROPOSITION I.3.1.

> *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin continu dans Ω et ω une 1-forme* ***continue localement exacte*** *dans Ω. Alors il existe une primitive de ω le long de γ et celle-ci est unique à une constante additive près.*

Démonstration. Unicité. Soient f_1 et f_2 deux primitives de ω le long de γ de sorte que $\forall t_0 \in I$ il existe deux primitives F_1 et F_2 de ω dans un voisinage V de $\gamma(t_0)$ telles que $f_i = F_i \circ \gamma$, $i = 1, 2$, au voisinage de t_0. Comme on peut supposer V connexe, F_1 et F_2 diffèrent d'une constante, ce qui montre que $f_1 - f_2$ est localement constante. Comme cette fonction est continue, elle est constante.

Existence. Par compacité de $\gamma([0,1])$, il existe $\delta > 0$ tel que au voisinage de toute disque fermée de rayon δ centrée en un point du chemin la forme ω admet une primitive. La continuité uniforme de γ montre alors qu'il existe des points t_i, $0 = t_1 < t_2 < \ldots t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = 1$, tels que chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est contenu dans un disque D_i, de rayon δ, centré en un point du chemin et sur lequel ω admet une primitive F_i. Pour chaque i , $D_i \cap D_{i+1}$ est un ouvert connexe non vide (il contient $\gamma(t_{i+1})$) donc $F_i - F_{i+1}$ est constante sur cet ouvert. Par récurrence, il est alors clair que l'on peut modifier les F_i en leur rajoutant des constantes convenables de sorte que la fonction f définie par $f(t) = F_i(\gamma(t))$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ soit une primitive de ω le long de γ. □

Cette Proposition permet d'étendre la définition de l'intégrale d'une 1-forme continue localement exacte (*mais pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$*) aux chemins qui sont seulement continus γ :

DÉFINITION I.3.3.

> Soient ω une 1-forme *continue localement exacte* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et γ un chemin continu dans Ω (paramétré sur $I = [0,1]$). Soit f une primitive de ω le long de γ. On appelle *intégrale de ω le long de γ* le nombre, indépendant de la primitive choisie f,
> $$\int_\gamma \omega = f(1) - f(0).$$

Naturellement, si le chemin γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, cette Définition est la même que celle donnée à la Définition I.2.1.

PROPOSITION I.3.2.

> *Soit ω une 1-forme continue localement exacte dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit $(\gamma_n)_n$ une suite de chemins continus qui converge uniformément vers un chemin γ. Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \omega = \int_\gamma \omega$.*

Démonstration. En effet, les primitives locales de ω F_i, $1 \leq i \leq k$, utilisées pour définir $\int_\gamma \omega$ sont définies sur des ouverts qui recouvrent $\mathrm{Im}\gamma_n$ pour n assez grand (convergence uniforme et compacité de $\mathrm{Im}\gamma$), on peut donc les prendre pour définir les intégrales $\int_{\gamma_n} \omega$, d'où la conclusion. □

THÉORÈME I.3.1.

> *Soit ω une 1-forme continue localement exacte dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins continus homotopes (avec extrémités fixes) dans Ω on a $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.*

Démonstration. Soient $I_1 = [a,b]$ et $I_2 = [c,d]$ deux segments et soit $\varphi : I_1 \times I_2 \to \Omega$ une application continue. On dit qu'une fonction continue $f(t,u); I_1 \times I_2 \to \Omega$ est une *primitive de ω le long de φ* si $\forall (t_0, u_0) \in I_1 \times I_2$ il existe une primitive F_0 de ω au voisinage de $\varphi(t_0, u_0)$ telle que, dans un voisinage de (t_0, u_0) on ait $f(t,u) = F_0(\varphi(t,u))$. Comme dans la preuve de la Proposition I.3.1, il est clair que deux primitives de ω le long de φ diffèrent d'une constante.

Remarquons alors que la démonstration du Théorème revient à voir qu'il existe un primitive f de ω le long d'une homotopie $\delta : I \times I \to \Omega$ de γ_0 à γ_1 : en effet si une telle primitive existe, alors (l'homotopie étant à extrémités fixes) on a $f(0,0) = f(0,u) = f(0,1)$ et $f(1,0) = f(1,u) = f(1,1)$, $\forall u \in I$, et comme $t \to f(t,0)$ est une primitive de ω le long de γ_0 et $t \to f(t,1)$ une primitive le long de γ_1, on a $\int_{\gamma_0} \omega = f(1,0) - f(0,0)$ et $\int_{\gamma_1} \omega = f(1,1) - f(0,1)$ ce qui montre le Théorème.

Pour achever la preuve construisons donc une telle primitive. Par compacité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(t,u) \in I \times I$ $\delta([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \times [u-\varepsilon, u+\varepsilon])$ soit contenu dans un disque ouvert sur lequel ω admet une primitive. On considère alors un découpage de $I \times I$ en carrés $[t_i, t_{i+1}] \times [u_j, u_{j+1}]$, $1 \leq i \leq k$ $1 \leq j \leq l$, tels que $t_{i+1} - t_i = u_{j+1} - u_j = \varepsilon$. Alors, la preuve de la Proposition I.3.1 montre que l'on peut construire une primitive de ω le long du chemin $t \to \delta\left(t, \frac{u_{j+1}+u_j}{2}\right)$, $t \in I$, en utilisant ces disques ce qui donne une primitive f_j de ω le long de la restriction de δ à $I \times \left([u_j - \varepsilon/2, u_{j+1} + \varepsilon/2] \cap [0,1]\right)$. Comme f_1 et f_2 sont deux primitives de ω le long de la restriction de δ à $I \times [u_2 - \varepsilon/2, u_2 + \varepsilon/2]$ elles diffèrent d'une constante C_2, et, en remplaçant f_2 par $f_2 + C_2$ on défini une primitive de ω le long de la restriction de δ à $I \times [0, u_3 + \varepsilon/2]$. On conclut alors par récurrence sur j. □

Remarque. On notera que ce Théorème s'applique en particulier aux formes fermées (c.f. Proposition I.1.5). En particulier, il permet d'étendre la notion d'indice $I(\gamma, a)$ d'un lacet γ par rapport à un point a aux lacets qui sont **seulement continus** puisque la forme $\frac{dz}{z-a}$ est fermée au voisinage de l'image du lacet.

DÉFINITION I.3.4.
On dit qu'un ouvert de $\mathbb{C}$ est *simplement connexe* s'il est connexe et si tout chemin continu fermé contenu dans Ω est homotope à un point.

THÉORÈME I.3.2.
Toute 1*-forme différentielle continue localement exacte dans un ouvert simplement connexe y est exacte.*

Démonstration. En effet, le Théorème I.3.1 montre que, pour tout chemin fermé γ contenu dans Ω on a $\int_\gamma \omega = 0$. La conclusion résulte donc du Théorème I.2.1. □

Comme pour le précédent, on notera que ce Théorème s'applique aux formes fermées.

I.4 Deux applications

I.4.1 Logarithme complexe

DÉFINITION I.4.1.
Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On appelle *détermination du logarithme de* z un nombre complexe ζ tel que $e^\zeta = z$ c'est-à-dire un nombre tel que $\zeta = \log|z| + i\mathrm{Arg} z + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre $\log|z| + i\mathrm{Arg} z$ s'appelle parfois la *détermination principale du logarithme de* z.

La question que l'on se pose est de savoir si on peut trouver une application $z \to \zeta(z)$ *continue* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^*$ telle que $\zeta(z)$ soit une détermination du logarithme de z. Lorsqu'une telle fonction existe, on parle de *détermination continue du logarithme de* z *dans* Ω.

En général une telle détermination continue n'existe pas : par exemple si $\zeta(z)$ était une détermination continue de $\log z$ dans $\mathbb{C}^*$, on aurait $\zeta\left(e^{i\vartheta}\right) = i\vartheta + 2ik\pi$ donc $\zeta\left(e^{i0}\right) = 2ik\pi$ et $\zeta\left(e^{i2\pi}\right) = 2i(k+1)\pi$ ce qui contredit la continuité de $\zeta(z)$. Pour avoir l'existence d'une telle détermination il faut faire une hypothèse topologique sur l'ouvert Ω :

PROPOSITION I.4.1.
Sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ *il existe une détermination continue du logarithme de* z *qui est unique à l'addition d'un multiple entier de* $2i\pi$ *près.*

Démonstration. Soit a un point de Ω et posons $\log a = \log|a| + i\mathrm{Arg} a$. D'après le Théorème I.3.2 la forme $\frac{dz}{z}$ (qui est fermée dans $\mathbb{C}^*$) est exacte sur Ω. Soit $\log z$ sa primitive (sur Ω) qui vaut $\log a$ au point a et considérons la fonction $h(z) = e^{\log z}$. Par définition cette fonction vérifie l'équation $\frac{\partial h}{\partial z}(z) = \frac{h(z)}{z}$. Remarquons alors que la fonction $h_0(z) = z$ est aussi une solution de cette équation, et, par suite, la fonction $g(z) = \frac{h(z)}{h_0(z)}$ vérifie $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$, et comme on a de manière évidente $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$, g est localement constante donc constante puisque Ω est supposé connexe. Ainsi $h(z) = \lambda z$, pour une constante λ, et comme $h(a) = a$ par définition de h, on a $\lambda = 1$ ce qui montre que la fonction $\log z$ définie ci-dessus est une détermination (continue) du logarithme de z sur Ω. □

Remarque. Comme deux déterminations continues du logarithme de z sur Ω diffèrent d'une constante, la démonstration ci-dessus montre qu'une détermination continue du logarithme de z sur Ω est une primitive de la forme $\frac{dz}{z}$ (i.e. sa différentielle extérieure est $\frac{dz}{z}$).

I.4.2 *Quelque propriétés de l'indice*

Après le Théorème I.3.1, nous avons remarqué que l'on peut étendre aux chemins continus la notion d'indice par rapport à un point : si γ est un chemin continu (paramétré sur $[0,1]$), et si $a \notin \mathrm{Im}\gamma$, la forme $\frac{dz}{z-a}$ est localement exacte sur un voisinage de $\mathrm{Im}\gamma$ et si f est une primitive de cette forme le long de γ, par définition, on a $I(\gamma,a) = f(1) - f(0)$. De plus, f est caractérisée par la fait que, au voisinage de $t_0 \in [0,1]$, on a $f(t) = \log(\gamma(t) - a) + C_0$ de sorte que $\frac{e^{f(t)}}{\gamma(t)-a} = e^{C_0}$ est localement constante, donc constante. Ainsi, $I(\gamma,a) = f(1) - f(0)$ où f est une fonction continue vérifiant $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$, $t \in [0,1]$.

PROPOSITION I.4.2.
Soit $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe centré en 0, $\mathbb{T}$ sa frontière. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et posons $\gamma(t) = f\left(e^{it}\right)$. Si $I(\gamma,a) \neq 0$ en un point $a \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{T})$ alors f prends la valeur a sur l'intérieur de $\mathbb{D}$.

Démonstration. En effet, dans le cas contraire, $\delta(t,r) = f\left(re^{it}\right)$ est une homotopie de γ vers le lacet constant égal à $f(0)$ contenue dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Comme $\frac{dz}{z-a}$ est fermée sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, donc localement exacte, et on a $I(\gamma,a) = 0$ d'après le Théorème I.3.1. □

PROPOSITION I.4.3.
Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés continus dans $\mathbb{C}^*$ et posons $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Alors $I(\gamma,0) = I(\gamma_1,0) + I(\gamma_2,0)$.

Démonstration. En effet, pour chaque i soit f_i une primitive de $\frac{dz}{z}$ le long de γ_i telle que $e^{f_i(t)} = \gamma_i(t)$ Alors $f = f_1 + f_2$ est une primitive de $\frac{dz}{z}$ le long de γ et $I(\gamma,0) = \frac{f(1)-f(0)}{2i\pi} = I(\gamma_1,0) + I(\gamma_2,0)$. □

PROPOSITION I.4.4.
Soient γ_0 et γ_1 deux chemins fermé continus dans $\mathbb{C}$ tels que $0 \notin \mathrm{Im}\gamma$ et, $\forall t$, $|\gamma_1(t)| < |\gamma_0(t)|$. Alors $t \mapsto \gamma_0(t) + \gamma_1(t)$ a son image dans $\mathbb{C}^*$ et $I(\gamma_0 + \gamma_1, 0) = I(\gamma_0, 0)$.

Démonstration. En effet, en écrivant $\gamma_0 + \gamma_1 = \gamma_0\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)$, on remarque que le chemin $\nu = 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ étant contenu dans le disque centré en 1 et de rayon 1 (par l'hypothèse) on a (Proposition I.4.1) $I(\nu,0) = 0$, et on applique la Proposition précédente. □

PROPOSITION I.4.5 (Théorème de Rouché).
Soient γ_0 et γ_1 deux chemins fermé continus dans $\mathbb{C}$. Si, $\forall t$, on a

$$|\gamma_0(t) + \gamma_1(t)| < |\gamma_0(t)| + |\gamma_1(t)|,$$

alors les chemins ne passent pas par 0 et on a $I(\gamma_0,0) = I(\gamma_1,0)$.

Démonstration. Il est clair que l'hypothèse implique que les chemins ne passent pas par l'origine. L'hypothèse s'écrit donc aussi $\left|1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right| < 1 + \frac{|\gamma_1|}{|\gamma_0|}$, ce qui montre que l'image de $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$, et, par suite, $I(\gamma_1/\gamma_0, 0) = 0$. Or, si f_i est telle que $e^{f_i(t)} = \gamma_i(t)$, on a $e^{f_1(t) - f_0(t)} = \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)}$, donc $0 = I(\gamma_1/\gamma_0, 0) = f_1(1) - f_0(1) - (f_1(0) - f_0(0)) = I(\gamma_1,0) - I(\gamma_0,0)$. □

Exercices

EXERCICE I.1 (la dualité champ de vecteurs/1-formes différentielles et les « coordonnées » $(z,\bar{z})$ en place de (x,y)).

1. Un champ de vecteurs complexe dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'exprime sous la forme

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

où u et v sont deux fonctions de U dans $\mathbb{C}$[1]. Vérifier qu'un tel champ s'exprime aussi sous la forme

$$a(z)\frac{\partial}{\partial z}+b(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

où les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ sont définis par

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\Big) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

et $z=x+iy$. Calculer a et b en fonction de u et v.

2. Le crochet de dualité entre le champ de vecteurs $u\,\partial/\partial x+v\,\partial/\partial y$ et la 1-forme différentielle $Pdx+Qdy$ (P et Q étant des fonctions de U dans $\mathbb{C}$) est défini ponctuellement par

$$\Big\langle u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\,,\,Pdx+Qdy\Big\rangle_{(x,y)}=u(x,y)P(x,y)+v(x,y)Q(x,y).$$

Vérifier que l'on a, pour tout (x,y) dans U,

$$\begin{aligned}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x},dx\Big\rangle_{(x,y)} &= \Big\langle\frac{\partial}{\partial y},dy\Big\rangle_{(x,y)}=1\\ \Big\langle\frac{\partial}{\partial z},dz\Big\rangle_{z} &= \Big\langle\frac{\partial}{\partial \bar{z}},d\bar{z}\Big\rangle_{z}=1\end{aligned}$$

si $dz: dx+idy$ et $d\bar{z}: dx-idy$, ainsi que

$$\begin{aligned}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x},dy\Big\rangle_{(x,y)} &= \Big\langle\frac{\partial}{\partial y},dx\Big\rangle_{(x,y)}=0\\ \Big\langle\frac{\partial}{\partial z},d\bar{z}\Big\rangle_{z} &= \Big\langle\frac{\partial}{\partial \bar{z}},dz\Big\rangle_{z}=0.\end{aligned}$$

EXERCICE I.2 (le « yoga » des calculs en les coordonnées z et $\bar{z}$).
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ (les coordonnées y étant respectivement dénotées z et w), f une fonction différentiable de U dans V, g une fonction différentiable de V dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\partial(g\circ f)/\partial z$ et $\partial(g\circ f)/\partial\bar{z}$ en fonction de f, g, $\partial f/\partial z$, $\partial f/\partial \bar{z}$, $\partial g/\partial w$, $\partial g/\partial \overline{w}$.

Indication : *exprimer plutôt l'action de la différentielle de $g\circ f$ sur*

$$h=(h_1,h_2)\longleftrightarrow h_1+ih_2.$$

EXERCICE I.3 (le laplacien dans le plan ; coordonnées cartésiennes et polaires).

1. Vérifier que, pour toute fonction F de classe C^2 et à valeurs complexes dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z}\circ\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big)[F]=\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\circ\frac{\partial}{\partial z}\Big)[F]=\frac{1}{4}\Delta[F],$$

où

$$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

désigne l'opérateur de Laplace (ou *laplacien*) en dimension 2.

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et Ω son image réciproque par l'application

$$(r,\theta)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}\longmapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Vérifier que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour $(r,\theta)\in\Omega$,

$$\Delta_{(x,y)}[F](r\cos\theta,r\sin\theta)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)[G](r,\theta)$$

si $G(r,\theta):=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Déterminer toutes les fonctions F de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, radiales ($F(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$), et solutions de $\Delta[F]\equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

[1]Dans le cours, on considère qu'un champ de vecteurs complexe sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une application de U dans $\mathbb{C}^2$, celle qui à (x,y) associe $(u(x,y),v(x,y))$. Les deux points de vue (celui ci et celui du cours) reviennent au même en ce qui concerne la définition des champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela change par contre si l'on se place sur une surface ; seul celui présenté ici garde un sens.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et f une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{C}$; on note toujours Ω cette fois l'image réciproque de U par l'application
$$(r,\theta) \in]0,\infty[\times\mathbb{R} \longmapsto re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*.$$
Vérifier que, si f est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour tout (r,θ) dans Ω,
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)[g](r,\theta)\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)[g](r,\theta).\end{aligned}$$
Vérifier que, si $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la fonction
$$f_{\theta_0} : z = (x+iy) \longmapsto \log|z| + i\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$
est une fonction de classe C^2 dans $U_{\theta_0} := \mathbb{C}\setminus\{te^{i\theta_0}\,;\,t\geq 0\}$, telle que $(\partial/\partial\bar{z})[f_{\theta_0}] \equiv 0$ dans U_{θ_0}.

EXERCICE I.4 (fonctions positivement homogènes).
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $r\in\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, pour tout $t>0$, on a
$$f(tx) = t^r f(x).$$

1. Montrer que si f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$, dire qu'elle est positivement homogène de degré $r\in\mathbb{R}$ équivaut à dire qu'elle satisfait l'équation d'Euler :
$$df(x).x = \sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = rf(x)\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$
2. Si g est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, positivement homogène de degré $r>0$ dans $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, trouver toutes les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$df(x).x = \sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = g(x)\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

EXERCICE I.5 (le « pullback » d'une forme différentielle).
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et Φ une application de classe C^1 de U dans V. Exprimer $\Phi^*[d\bar{z}\wedge dz]$ en termes de $|\partial\Phi/\partial z|$ et de $|\partial\Phi/\partial\bar{z}|$.

EXERCICE I.6 (formes exactes, formes fermées).
La 1-forme
$$\omega = 2xzdx + 2yzdy - (x^2+y^2+1)dz$$
est-elle fermée dans $\mathbb{R}^3$? exacte ? Trouver explicitement un facteur intégrant, c'est-à-dire une fonction $F : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, de classe C^1, tel que $F\omega$ soit exacte dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE I.7 (formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$)).
Pour quelles valeurs de $\alpha>0$ la forme
$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{|z|^\alpha}\,,\ z=x+iy,$$
est elle fermée dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

EXERCICE I.8 (formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$)).
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{C}$; montrer que $f(z)\,dz$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial\bar{z}\equiv 0$ et que $f(z)d\bar{z}$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial z\equiv 0$.

EXERCICE I.9 (formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$)).
1. Soit p un entier relatif et $\omega_p = z^p dz$, considérée comme une 1-forme de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pour quelles valeurs de p cette forme est-elle fermée dans $\mathbb{C}^*$? exacte dans $\mathbb{C}^*$? Pour les valeurs de p pour lesquelles elle est exacte, déterminer toutes les fonction $F : \mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, de classe C^1, telles que $dF=\omega_p$ dans $\mathbb{C}^*$.

2. Soit θ_0 un nombre réel, U_{θ_0} l'ouvert
$$U_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0}\,;\, t \geq 0\}$$
(le plan complexe "fendu" le long de la demi-droite issue de l'origine et dirigée par $e^{i\theta_0}$) et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la 1-forme différentielle dans U_{θ_0} définie par
$$\omega_\alpha(z) = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)}\, dz.$$
Pourquoi cette forme est-elle exacte dans U_{θ_0} quelque soit la valeur de α ? Vérifier en utilisant le résultat établi à l'Exercice I.3, question 3., que les fonctions F de classe C^1 dans U_{θ_0} telles que $dF = \omega_\alpha$ sont de la forme
$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \frac{|z|^{\alpha+1}}{\alpha+1} \exp\Big(i(\alpha+1)\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)\Big)$$
si $\alpha \neq -1$ (C étant une constante arbitraire) et de la forme
$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \log|z| + i \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$
si $\alpha = -1$ (C désignant toujours une constante arbitraire).

EXERCICE I.10 (formes différentielles et équations différentielles).
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^1 fermée dans U. Écrire ce que cela signifie sur P et Q. On désigne par F une primitive de $Pdx + Qdy$ dans U, c'est-à-dire une fonction de classe C^2 dans U telle que $dF = Pdx + Qdy$. Pourquoi existe-t-il bien une telle primitive ? Quelle est l'équation cartésienne du graphe de la solution maximale du problème de Cauchy
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad , \quad y(x_0) = y_0$$
lorsque (x_0, y_0) est un point de U où Q ne s'annule pas ?

EXERCICE I.11 (la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ pour un simplexe « tordu » positivement orienté).
Soit Δ_0 le simplexe
$$\Delta_0 := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2\,;\, t \geq 0, s \geq 0, t+s \leq 1\}$$
et $\Phi = (\varphi, \psi)$ une application de classe C^2 au voisinage de Δ_0, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $d\Phi(t,s)$ soit inversible en tout point de Δ_0 et de jacobien strictement positif en tout point. On suppose aussi que Φ réalise une bijection entre $\overline{\Delta}_0$ et $\Phi(\overline{\Delta}_0)$. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta}_0)$, vérifier la formule de Stokes (ou de Green-Riemann puisque l'on est ici en dimension 2) :
$$\begin{aligned}
\iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} d[Pdx + Qdy] &= \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} d[Pdx+Qdy] \\
&= \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy \\
&:= \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy \\
&= \iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy \\
&= \iint_{\Delta_0} \Phi^*[d\omega] = \int_{\partial\Delta_0} \Phi^*[\omega] = \int_{\partial[\Phi(\overline{\Delta}_0)]} (Pdx + Qdy)
\end{aligned}$$
après avoir justifié le fait que la frontière $\partial[\Phi(\overline{\Delta}_0)]$ de $\Phi(\overline{\Delta}_0)$ est C^1 par morceaux (les frontières sont ici toutes orientées dans le sens trigonométrique). ***Indication*** *: on traitera dans un premier temps le cas où Φ est l'identité de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.*

Peut-on s'affranchir de la condition « ω de classe C^2 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta}_0)$ » et la remplacer par la condition plus faible « ω de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta}_0)$ » ?

EXERCICE I.12 (retour au lemme de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles).
Dans l'exercice précédent, le lemme de Schwarz (sur le fait que l'on puisse permuter l'action de $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ pour une fonction deux fois différentiable en un point) a joué un rôle essentiel (même s'il est caché par la propriété $d \circ d = 0$) pour prouver
$$\iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_{\Delta_0} \Big(\frac{\partial A}{\partial s} - \frac{\partial B}{\partial t}\Big) dsdt$$
si $Ads + Bdt := \Phi^*[Pdx + Qdy]$ comme conséquence de la formule de changement de variables dans l'intégration relativement à la mesure de Lebesgue. Dans cet exercice, nous proposons de montrer pourquoi la formule de Green-Riemann pour les rectangles suffit à impliquer le lemme de Schwarz.

1. Montrer que si G_1 et G_2 sont deux fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que
$$\iint_R G_1(x,y)\,dxdy := \iint_R G_2(x,y)\,dxdy$$
pour tout rectangle fermé plein R inclus dans U, alors $F \equiv G$ dans U.
2. Déduire de a) que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs complexes, alors on a
$$(\partial^2/\partial x\partial y)[F] \equiv (\partial^2/\partial y\partial x)[F]$$
dans U.

EXERCICE I.13 (appliquer le lemme de Poincaré pour les 1-formes (en dimension n)).
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et $F\ :\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 ne s'annulant pas. Montrer que la 1-forme dF/F est exacte dans U.

EXERCICE I.14 (facteurs intégrants locaux dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$).
Soit ω une 1-forme de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que $\omega(z_0) \neq 0$ (ce qui signifie $(P(x_0,y_0),Q(x_0,y_0)) \neq 0$ si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$). Montrer qu'il existe un voisinage $V_{(x_0,y_0)}$ de (x_0,y_0) dans U, une fonction f_{x_0,y_0} de classe C^1 dans ce voisinage, telle que la forme $f_{(x_0,y_0)} \times \omega$ soit exacte dans $V_{(x_0,y_0)}$ ***Indication** : on effectuera un changement de variable de manière à ce que (localement) $\omega = Pdx$, puis on exploitera le lemme de Poincaré dans un ouvert étoilé.*

EXERCICE I.15 (autour du lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$).
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, étoilé par rapport à l'origine, et ω
$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$
une p-forme de classe C^1 dans U. Montrer que l'on définit une $(p-1)$-forme $I[\omega]$ de classe C^2 sur U en posant
$$I[\omega] = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \left[\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\Big(\int_0^1 t^{p-1}\alpha(tx_1,\dots,tx_n)\,dt\Big)\, x_{i_k} \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{p} dx_{i_l}\right].$$
Vérifier la formule $I[d\omega] + d[I[\omega]] = \omega$ et en déduire le lemme de Poincaré. ***Indication** : expliquer d'abord pourquoi il est possible de se ramener à supposer la forme ω du type $\omega = \alpha\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_p$.*

EXERCICE I.16 (une application directe de Green-Riemann).
Soit Γ le bord du carré $[-1,1]^2$ orienté dans le sens trigonométrique. Calculer
$$\int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$
***Indication :** remarquer que la 1-forme sous cette intégrale curviligne est fermée dans $\mathbb{C}^*$ et que par conséquent on peut remplacer $[-1,1]^2$ par le disque de centre 0 et de rayon ε, avec ε arbitraire ; on expliquera pourquoi.*

EXERCICE I.17 (encore une application directe de Green-Riemann).
Calculer l'aire de la boucle du folium de Descartes d'équation cartésienne
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$
(a désignant un paramètre réel). ***Indication :** on paramètrera cette courbe en cherchant le point d'intersection avec la droite d'équation $y = tx$, t désignant le paramètre que l'on utilisera ; la boucle correspond, on le montrera, aux valeurs du paramètre entre 0 et $+\infty$.*

EXERCICE I.18 (de Green-Riemann à Green-Ostrogradski).
Soit U un ouvert borné du plan dont la frontière est consititué d'un nombre fini de lacets simples (courbes de Jordan) $\gamma_1,\dots,\gamma_N$, de classe C^1 et réguliers (chaque lacet est paramétré par une fonction $\gamma\ : t \in [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe C^1 sur $[0,1]$ et telle que $d\gamma$ ne s'annule en aucun point de $[0,1]$). Soit $F = (P,Q) = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$. Vérifier la formule de Green-Ostrograski :
$$\iint_U \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,dxdy = \sum_{j=1}^{N}\int_0^1 \langle n_{\rm ext}(\gamma_j(t)), F(\gamma_j(t))\rangle\, |\gamma_j'(t)|\,dt,$$
où $n_{\rm ext}(\gamma_j(t))$ désigne le vecteur normal unitaire (pointant vers l'extérieur de U) à l'arc géométrique paramétré par γ_j et $\langle\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, en langage de physicien, l'intégrale (surfacique) de la divergence du champ de vecteurs F est égal au flux sortant de ce champ au travers du bord. ***Indication :** on appliquera Green-Riemann avec la forme $Pdy - Qdx$.*

EXERCICE I.19 (une approche au théorème du point fixe de L. Brouwer).
Soit $f = (P, Q)$ une application définie et de classe C^2 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et telle que

$$f(\overline{D(0,1)}) \subset \{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1\} = \partial\overline{D}$$

(f réalise une *rétraction* du disque fermé sur son bord).

1. Si l'on suppose en plus des hypothèses ci-dessus que la restriction de f à $\partial\overline{D(0,1)}$ est l'identité, déduire de la formule de Green-Riemann que, si Γ désigne le lacet $\theta \in [0,2\pi] \mapsto e^{i\theta}$,

$$\int_\Gamma P\,dQ = 0$$

***Indication*:** *on montrera que la forme $Pdx + Qdy$ est fermée dans le disque unité ouvert $D(0,1)$.*
Montrer que l'hypothèse additionnelle implique $\gamma^*[PdQ] = \gamma^*[xdy]$ et en déduire

$$\int_\Gamma P\,dQ = \pi\,.$$

Que peut-on en conclure ?

2. Soit F une application définie et de classe C^2 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $F(\overline{D(0,1)}) \subset \overline{D(0,1)}$ et que $F(x,y) \neq (x,y)$ pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$. Pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$, on note $G(x,y)$ le point d'intersection du cercle unité $\partial\overline{D(0,1)}$ avec la demi-droite issue de $F(x,y)$ et dirigée par le vecteur (non nul par hypothèses) $(x,y) - F(x,y)$. Vérifier que $(x,y) \mapsto G(x,y)$ se prolonge en une fonction (P,Q) de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ qui vérifie les hypothèses de l'en-tête de l'exercice et du 1. En déduire que F admet nécesssairement un point fixe dans $\overline{D(0,1)}$ (*i.e.* un point (x_0,y_0) tel que $F(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$).

EXERCICE I.20 (primitives de formes et connexité).
Soient $U_1,\dots,U_N$ des ouverts de $\mathbb{C}$ tels que, pour chaque $k = 1,\dots,N-1$, l'intersection de $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ avec U_{k+1} soit connexe. Soit ω une 1-forme continue sur l'union des U_k. Montrer qu'il est équivalent de dire que ω est exacte et de dire que, pour chaque $k = 1,\dots,N$, la restriction de ω à U_k est exacte.

EXERCICE I.21 (la division des formes).
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), f une fonction de classe C^1 dans U telle que $df(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Soit $p \geq 2$ et ω une p-forme continue sur U. Montrer qu'il existe une $(p-1)$-forme ξ continue sur U telle que $\omega = df \wedge \xi$. Trouver toutes les $p-1$-formes continues solutions de l'équation $df \wedge \xi = 0$.

À quelle condition une 2-forme continue $\omega = F\,dx \wedge dy$ dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ s'écrit-elle sous la forme $\omega = d|z|^2 \wedge \xi$, où ξ est une 1-forme continue sur U (on distinguera les cas où $0 \in U$ et $0 \notin U$) ?

EXERCICE I.22 (homotopie à point de base marqué et groupes $\pi_1(U,a)$).
Soit U un ouvert connexe non vide et, pour $a \in U$, $\pi_1(U,a)$ le *groupe d'homotopie à point de base a*, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des lacets continus γ de support dans U, d'origine et d'extrémité « marquées » a pour la relation d'équivalence suivante : γ_0 est homotope à γ_1 si et seulement si il existe une fonction F continue $F\ : [0,1]\times[0,1] \to U$ telle que

$$\begin{aligned} F(0,s) = F(1,s) &= a \quad \forall\, s \in [0,1] \\ F(t,0) = \gamma_0(t) \quad , \quad F(t,1) &= \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

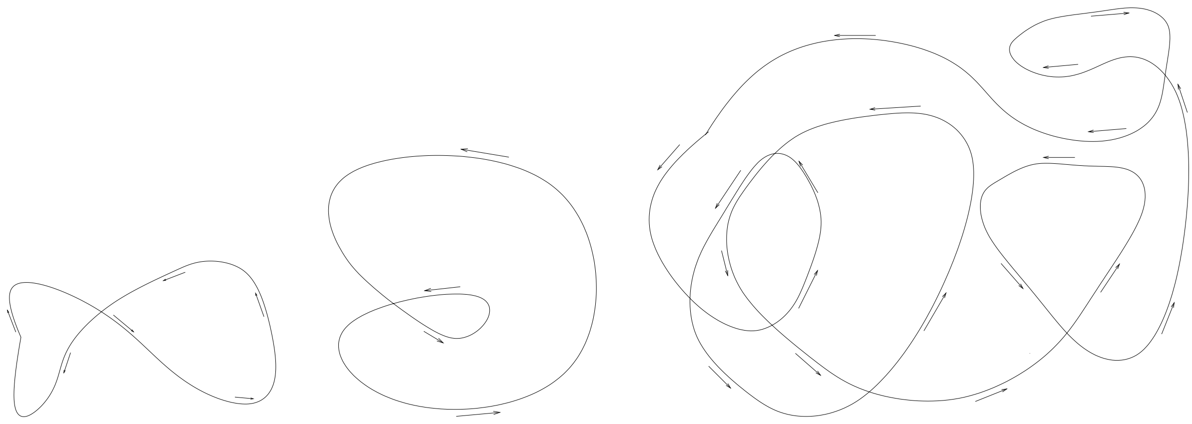
Montrer que, si a et b sont deux points distincts de U, $\pi_1(U,a)$ et $\pi_1(U,b)$ sont isomorphes.

EXERCICE I.23.
$\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ peuvent-ils être homéomorphes ? ***Indication*:** *on calculera pour ces deux ouverts le groupe d'homotopie $\pi_1(U,a)$ pour un point arbitraire a dans U (ces deux ouverts étant connexes, on sait d'après l'exercice précédent que ce groupe d'homotopie ne dépend pas du choix du point a dans l'ouvert).*

EXERCICE I.24 (la notion d'indice : le calcul « visuel »).
On considère les lacets γ représentés sur les figures ci-dessous ; calculer, dans chaque composante connexe du complémentaire du support de chacun de ces lacets, la valeur de la fonction

$$z \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

Tenter d'énoncer à partir de ces trois exemples une règle générale pour calculer $I(\gamma,z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$) en examinant comment une demi-droite arbitraire issue de z (demi-droite qu'il est judicieux de choisir intelligemment de manière à ce qu'elle ne rencontre le support de γ qu'en des points non multiples, de manière transverse, et que ce nombre de points d'intersection soit le plus petit possible) intersecte le support du lacet orienté γ.



@

EXERCICE I.25 (des calculs d'indice pas si surprenants que cela).
On rappelle qu'il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[-1,1]^2$ telle que $\gamma(0)=(-1,-1)$ et $\gamma(1)=(1,1)$; c'est la courbe introduite par G. Peano. Soit C la couronne fermée du plan complexe $C:=\{z\in\mathbb{C}\,;\,1\le|z|\le 2\}$ et C^- et C^+ les deux demi-couronnes fermées définies par $C^-:=C\cap\{z\,;\,\mathrm{Im}(z)\le 0\}$ et $C^+:=C\cap\{z\,;\,\mathrm{Im}(z)\ge 0\}$. En utilisant la courbe de Peano, construire un chemin continu $\gamma^+\ :[0,1]\to\mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^+, tel que $\gamma^+(0)=2$, $\gamma^+(1)=-1$, puis un chemin continu $\gamma^-\ :[0,1]\to\mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^- tel que $\gamma^-(0)=-1$, $\gamma^-(1)=2$. On note γ le lacet de $\mathbb{C}^*$ obtenu en concaténant (dans cet ordre) γ^+, puis γ^-. Que vaut l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma,0)$? Même question en demandant à 1 (et non plus -1) d'être l'extrémité du lacet γ^+ et en même temps l'origine de γ^-.

EXERCICE I.26 (variation de l'argument).
Soient $a_1,\dots,a_N$ N points du disque unité ouvert. Quel est le bilan global de la variation de l'argument le long du lacet

$$t\in[0,1]\longmapsto\prod_{j=1}^{N}\frac{e^{2i\pi t}-a_j}{1-\overline{a_j}e^{2i\pi t}}\ ?$$

Même questions si les a_j sont tous de module strictement supérieur à 1.

EXERCICE I.27 (variation de l'argument).
Construire une détermination continue de l'argument dans $\mathbb{C}$ privé de l'union de $[0,1]$ et du support du chemin paramétré $\Gamma: t\in[0,\infty[\mapsto f(t)e^{it}$, où f est un homéomorphisme croissante entre $[0,+\infty[$ et $[1,+\infty[$. ***Indication*** **:** *on pourra faire un dessin (on retire à $\mathbb{C}$ une courbe se déroulant en spirale), par exemple en prenant $f(t)=t+1$.*

Même question, mais cette fois dans $\mathbb{C}$ privé de l'adhérence de l'ensemble $\{f(t)e^{it}\,;\,t\in\mathbb{R}\}$, où f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,\infty[$ (par exemple $f(t)=\exp t$).

EXERCICE I.28 (indice et homotopie entre lacets dans $\mathbb{C}^*$ (à point de base marqué ou libre)).

1. Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$, tels que $\gamma_0(0)=\gamma_0(1)=\gamma_1(0)=\gamma_1(1)=a\in\mathbb{C}^*$, ayant même degré, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0)=\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$. Montrer que γ_0 et γ_1 sont des représentants du même élément du groupe d'homotopie $\pi_1(\mathbb{C}^*,a)$.
2. Soient γ_0 et γ_1 deux lacets continus de $\mathbb{C}^*$ ayant même degré. Montrer que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ pour l'homotopie entre lacets libres, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $F\ :[0,1]^2\to\mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{array}{rcl} F(t,0) &=& \gamma_0(t) \quad , \quad F(t,1)=\gamma_1(t) \quad \forall t\in[0,1]\\ F(0,s) &=& F(1,s) \quad \forall s\in[0,1]. \end{array}$$

EXERCICE I.29 (lacets de $\mathbb{C}^*$ et lacets tracés sur le cercle unité).

1. Montrer que tout lacet continu de $\mathbb{C}^*$ est homotope dans l'homotopie entre lacets libres (dans $\mathbb{C}^*$) à un lacet de support inclus dans le cercle unité.
2. Montrer que tout lacet continu γ de $\mathbb{C}^*$ est homotope au lacet

$$t\in[0,1]\longmapsto e^{2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma,0)t}.$$

EXERCICE I.30 (théorème de Rouché (illustré par G. Pólya)).
Un passant tenant son chien en laisse se déplace autour d'un rond-point de rayon R (il n'est pas autorisé à piétiner le disque central gazonné – de rayon R – de ce rond-point. La longueur de la laisse est $l<R$. Le chien peut, lui, marcher partout (sur le gazon comme sur la chaussée). Au terme d'un parcours indéfini, mais continu, le maître et son chien sont exactement revenus à leurs positions initiales. Si le maître a fait N tours autour du rond-point, combien le chien a-t-il fait de tours autour du centre 0 de ce même rond point ?

EXERCICE I.31 (calcul mathématique de l'indice ; théorème de Rouché).
Soit l'arc paramétré

$$\gamma : t \in [0,1] \longmapsto (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}.$$

Vérifier qu'il s'agit d'un lacet de $\mathbb{C}^*$ et calculer $I(\gamma, 0)$ dans un premier temps par le calcul d'une intégrale curviligne. Dessiner ensuite γ et retrouver ce résultat.

EXERCICE I.32 (théorème fondamental de l'algèbre, preuve géométrique).
Soit P un polynôme de degré $d > 0$. Montrer que, si R est assez grand, le lacet

$$\gamma_R : t \in [0,1] \longmapsto P(Re^{2i\pi t})$$

est de support inclus dans $\mathbb{C}^*$ et que le degré de ce lacet, c'est-à-dire l'indice $I(\gamma_R, 0)$, vaut exactement d. Vérifier que, si P ne s'annulait pas dans $\mathbb{C}$, le lacet γ_R serait homotope dans $\mathbb{C}^*$ (dans l'homotopie entre lacets libres définie à l'Exercice I.28) au lacet constant $t \in [0,1] \longmapsto P(0)$. En déduire une démonstration géométrique du théorème de d'Alembert (*tout polynôme de degré strictement positif à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*).

EXERCICE I.33 (variation de l'argument, comptage de zéros).
Soit $0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs et $P(X) := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. En considérant, si $P(z) = 0$, la ligne polygonale fermée de sommets $0, a_0, a_0 + a_1 z, a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}, 0$, montrer que les zéros de P sont tous dans le disque unité ouvert $D(0,1)$. Calculer la variation totale de l'argument le long du lacet $\Gamma : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto P(e^{i\theta})$. En déduire que l'équation

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = 0$$

a exactement $2n$ solutions distinctes dans $]0, 2\pi[$ (*pensez « visuellement » en vous aidant d'un dessin et comptez le nombre de fois au moins où le support de Γ doit couper l'axe des ordonnées).*

EXERCICE I.34 (notion de simple connexité).
Rappeler ce que signifie le fait qu'un ouvert de $\mathbb{C}$ soit simplement connexe. Montrer que l'union de deux ouverts simplement connexes d'intersection connexe non vide est simplement connexe. Si l'intersection n'est pas connexe ?

EXERCICE I.35 (le logarithme d'une fonction continue ne s'annulant pas dans un ouvert simplement connexe).
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction g continue sur U telle que $f = \exp(g)$. Montrer de la même manière que toute fonction continue de $\overline{U}$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit dans $\overline{U}$ comme l'exponentielle d'une fonction continue. ***Indication* :** *on montrera d'abord que si a et z sont deux points de U, c un nombre complexe tel que $f(a) = e^c$, et $\gamma_{a,z} : t \in [0,1] \mapsto \gamma_{a,z}(t)$ un chemin continu arbitraire de U tel que $\gamma_{a,z}(0) = a$ et $\gamma_{a,z}(1) = z$, il existe une fonction $c_{\gamma_{a,z}}(t)$ telle que $c_{\gamma_{a,z}}(0) = c$ et $f(\gamma_{a,z}(t)) = \exp(c_{\gamma_{a,z}}(t))$ pour tout $t \in [0,1]$ (on dit aussi un « relèvement » de $\gamma_{a,z}$). On remarquera ensuite que $c_{\gamma_{a,z}}(1)$ ne dépend que de a, c, z, mais pas du choix de $\gamma_{a,z}$, avant de proposer un candidat pour $g(z)$.*

EXERCICE I.36 (indice et logarithme).
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une application continue de U dans $\mathbb{C}^*$. On suppose que pour tout lacet continu γ de U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ (on dit encore le *degré* de $f \circ \gamma$ comme lacet de $\mathbb{C}^*$) est nul. Montrer qu'il existe une fonction g continue de U dans $\mathbb{C}$ telle que $f = \exp g$.

EXERCICE I.37 (indice, logarithme, racines n-ièmes).
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$.

1. Montrer que si f admet un logarithme continu dans U, elle admet aussi, pour tout entier strictement positif n, une racine n-ième continue dans U.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et γ un lacet continu de U. Montrer que si f admet une racine n-ième continue dans U, l'indice $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ de $f \circ \gamma$ par rapport à l'origine est un multiple de n.
3. Montrer que si f est une fonction continue de U dans $\mathbb{C}^*$ admettant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une racine n-ième continue, alors f admet aussi un logarithme continu dans U.

EXERCICE I.38 (indice et logarithme (suite)).

1. Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p un point de U, f une fonction continue dans $U \setminus \{p\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction g continue dans $U \setminus \{p\}$ telles que $f(z) = (z-p)^k \exp((z))$ pour tout $z \in U \setminus \{p\}$. ***Indication* :** *on notera γ le lacet $t \in [0,1] \longmapsto p + \varepsilon e^{it}$ avec ε suffisamment petit et on montrera que $k = \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ convient*

2. Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, p_1 et p_2 deux points distincts de U, f une fonction continue dans $U\setminus\{p_1,p_2\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U\setminus\{p_1,p_2\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z)=(z-p_1)^{k_1}(z-p_2)^{k_2}\exp(g(z))$ pour tout $z\in U\setminus\{p_1,p_2\}$.
3. Soit U un ouvert homéomorphe à $\mathbb{C}$, $p_1,\dots,p_N$ N points distincts de U, f une fonction continue dans $U\setminus\{p_1,\dots,p_N\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe N entiers $k_1,\dots,k_N$ dans $\mathbb{Z}$ (que l'on définira comme des indices de lacets de $\mathbb{C}^*$ par rapport à l'origine) et une fonction g continue dans $U\setminus\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$, à valeurs complexes, tels que $f(z)=(z-p_1)^{k_1}\cdots(z-p_N)^{k_N}\exp(g(z))$ pour tout z dans l'ouvert $U\setminus\{p_1,\dots,p_N\}$.

EXERCICE I.39 (indice et homotopie).

1. Soit f une application continue injective de $\overline{D(0,1)}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $s\in[0,1]$, on considère le lacet

$$t\in[0,1]\longmapsto f\Big(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big)-f\Big(-s\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\Big).$$

Montrer que tous les γ_s, $s\in[0,1]$, sont des lacets continus de support dans $\mathbb{C}^*$ et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans $\mathbb{C}^*$ (voir l'Exercice I.28). Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0)=\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)$.

2. Pourquoi existe-t-il une fonction continue $c_1\ :[0,1]\to\mathbb{C}$ telle que $\gamma_1(t)=\exp(c_1(t))$ pour tout $t\in[0,1]$? Vérifier qu'il existe deux entiers k_1 et l_1 tels que

$$\begin{aligned}\forall t\in[0,1/2]\,,\ c_1(t+1/2)-c_1(t)&=(2k_1+1)i\pi\\ \forall t\in[1/2,1]\,,\ c_1(t-1/2)-c_1(t)&=(2l_1+1)i\pi.\end{aligned}$$

Indication : *on utilisera le fait que $\gamma_1(t+1/2)=-\gamma_1(t)$ pour tout $t\in[0,1/2]$ et que $\gamma_1(t-1/2)=-\gamma_1(t)$ pour tout $t\in[1/2,1]$.*

3. En vérifiant, pour tout $t\in[0,1/2]$, que

$$c_1(t+1/2)=c_1(t+1/2)+2(k_1+l_1+1)i\pi\,,$$

montrer que $k_1\neq l_1$, puis que $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)=k_1-l_1\neq 0$. Déduire du 1. que l'on a nécessairement $\mathrm{Ind}(\gamma_0,0)\neq 0$.

4. On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0,1)})$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet $\Gamma_n\ :t\in[0,1]\longmapsto f(e^{it})-w_n$ ait son support dans $\mathbb{C}^*$ et soit d'indice nul par rapport à l'origine ***Indication :*** *on utilisera le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0,1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0,1)}$, voir l'Exercice I.35.*
5. Montrer (en utilisant le théorème de Rouché) que $\mathrm{Ind}(\Gamma_n,0)=\deg\gamma_0$ pour n assez grand et conclure à une contradiction.
6. Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si f est une application injective continue de U dans $\mathbb{C}$, $f(U)$ est un ouvert.

EXERCICE I.40 (intégration des formes localement exactes sur un chemin continu).
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma:[0,1]\to U$ un chemin continu de U et ω une 1-forme continue localement exacte au voisinage de U. Existe-t-il toujours un voisinage V du support de γ dans lequel ω soit exacte ? Sinon, donner un contre-exemple.

EXERCICE I.41 (intégration sur un lacet des formes localement exactes et exactes).
Soit $R=P/Q$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(X)$ et γ un lacet continu de $\mathbb{C}$ dont le support évite tous les pôles de R dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R(z)\,dz$$

est un nombre complexe algébrique (*les nombres algébriques forment un sous-corps de* $\mathbb{C}$). ***Indication :*** *on pensera à utiliser la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$.*

EXERCICE I.42 (formule de Cauchy).
Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_\gamma\frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz\quad\int_\gamma\frac{e^{\bar z}-e^{-\bar z}}{z^4}\,dz\,,\qquad\gamma:t\in[0,1]\mapsto e^{2i\pi t}.$$

EXERCICE I.43 (la formule de Cauchy-Pompeïu).
Soit φ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, nulle hors du disque $D(0,R_0)$ pour un certain $R_0>0$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{z-\zeta} = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(z+\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

   où l'on a noté sous l'intégrale $\zeta = \xi + i\eta$. ***Indication*:** *on appliquera la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) et l'on se souviendra que* $(\xi,\eta) \mapsto 1/(\xi+i\eta) = 1/\zeta$ *est localement intégrable dans* $\mathbb{R}^2$.

2. Déduire de 1.qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on explicitera) telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}(z) = \varphi(z)\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

EXERCICE I.44 (de la formule de Cauchy Pompeïu à l'identité de Bézout).
Soient $p_1,\dots,p_m$ m polynômes de n variables sans zéros communs dans $\mathbb{C}$, avec $d = \max(\deg p_j) > 0$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{z\} \longmapsto \sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2}\Big)\frac{p_j(\zeta)-p_j(z)}{\zeta - z}$$

   se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans $\mathbb{C}$. Calculer $Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1$.

2. Soit $R>0$ et z un point du disque ouvert $D(0,R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeïu (que l'on rappellera) la fonction

$$\zeta \in D(0,R) \longmapsto (Q_z(\zeta)(z-\zeta)+1)^2.$$

3. En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie au 2., construire m polynômes $q_1,\dots,q_m$ à coefficients complexes tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_j(z)q_j(z)\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

   Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

CHAPITRE II

FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans ce chapitre, ainsi que dans toute la suite du cours, on note $\mathrm{D}(z_0, r)$ le disque euclidien centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon r. Le disque $D(0,1)$ centré à l'origine et de rayon 1 sera noté $\mathbb{D}$. Son bord sera noté $\mathbb{T}$. De plus, nous utiliserons constamment (et même uniquement) les notation complexes introduites avant l'énoncé de la formule de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.2.1).

II.1 Définition et propriétés fondamentales

DÉFINITION II.1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe au point* $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existe. f est dite *holomorphe* (dans Ω) si elle est holomorphe en tout point de Ω.

En d'autres termes, f est holomorphe en z_0 si elle est différentiable en ce point et si sa différentielle $df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire c'est-à-dire si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ est nulle. En particulier, f est holomorphe en tout point de Ω si elle est différentiable en tout point et si sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est identiquement nulle. Cette dernière définition peut se généraliser à des objets plus généraux que les fonctions différentiables, à savoir les distributions sur Ω : en théorie des distributions, on montre que l'opérateur $T \mapsto \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}$ est « elliptique » ce qui implique que si une distribution T vérifie $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ alors $T \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, et, par suite, si $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}$ est la distribution nulle alors T est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ holomorphe sur Ω. Ceci fait que certains auteurs définissent les fonction holomorphes sur un ouvert comme étant les fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est identiquement nulle.

Les propriétés classiques des séries entières montrent que :

Exemple II.1.1 (Exemple fondamental). La somme d'une série entière est holomorphe sur son disque de convergence.

THÉORÈME II.1.1 (Théorème de Cauchy).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et D une droite. Soit f une fonction continue sur Ω holomorphe dans $\Omega \setminus D$. Alors la 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.

En particulier :

1. *Si Ω est simplement connexe il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ telle que $\frac{\partial g}{\partial z} = f$ et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$, ce qui implique que g est holomorphe dans Ω et que $g' = f$.*
2. *Si γ est un lacet continu homotope à un point dans Ω on a $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ (Théorème de Cauchy).*

Remarque. Dans le 1. ci-dessus, si on ne suppose pas Ω simplement connexe, la conclusion peut être fausse : par exemple $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

Dans le 2., si γ n'est pas homotope à un point la conclusion est mise en défaut avec le même exemple.

Démonstration. D'après le Théorème I.2.2 il faut montrer que si Δ est un triangle fermé contenu dans Ω alors $\int_\Delta f(z)dz = 0$. Posons $J = \int_\Delta f(z)dz$, et supposons $|J| > 0$.

Premier cas : $D \cap \Delta = \emptyset$. En utilisant les milieux des cotés de Δ, on découpe celui-ci en quatre triangles et il en existe un (fermé), Δ_1, qui vérifie $\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{|J|}{4}$. En répétant cette opération avec Δ_1 on construit un second triangle Δ_2, puis, par récurrence, on construit une suite de triangles fermés Δ_n tels que $\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \geq \frac{|J|}{4^n}$. Comme le diamètre de Δ_n tends vers 0 il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\bigcap_n \Delta_n = \{z_0\}$. Comme f est holomorphe en z_0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|z - z_0| \leq \eta$, on a

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Si on remarque alors que, par construction, la longueur de $\partial\Delta_n$ est majorée par $C2^{-n}$, que le diamètre de Δ_n est aussi majoré par $C2^{-n}$, où C est une constante indépendante de n, et que, pour $n \geq n_\eta$ on a $\Delta_n \subset \{|z - z_0| < \eta\}$, il vient (pour $n \geq n_\eta$)

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz - \int_{\partial\Delta_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right) dz\right| \leq \varepsilon C 2^{-2n}.$$

Or, comme les formes $f(z_0)\,dz$ et $f'(z_0)(z - z_0)\,dz$ sont exactes ($(z - z_0)\,dz = \frac{1}{2} d\left((z - z_0)^2\right)$) on a

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right) dz = 0,$$

et on obtient $\frac{|J|}{4^n} \leq \varepsilon C 2^{-2n}$ soit $|J| \leq \varepsilon C$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur J.

Second cas : $D \cap \Delta \neq \emptyset$. Si l'un des cotés de Δ est porté par D, on déplace ce coté d'une distance ε ce qui donne un triangle Δ_ε un peu plus petit auquel on applique le premier cas. Le résultat s'obtient alors par passage à la limite quand ε tends vers 0 (c.f. Proposition I.3.2). Si la droite D rencontre Δ uniquement sur un sommet, on déplace celui-ci le long d'un coté de ε et on conclut par un raisonnement évident similaire. Enfin si D coupe Δ, en utilisant un point sur le coté non coupé par D et D, on découpe Δ en quatre triangles Δ_i qui rentrent dans l'un des deux cas précédents et on obtient $\int_{\Delta_i} f(z)dz = 0$ donc $\int_\Delta f(z)dz = \sum \int_{\Delta_i} f(z)dz = 0$. □

THÉORÈME II.1.2 (Formule de Cauchy).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans Ω. Soit γ un lacet continu homotope à un point dans Ω. Alors, pour tout $a \in \Omega \setminus \mathrm{Im}\gamma$ on a

$$I(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - z} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ f'(a) & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Alors g est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Le Théorème de Cauchy implique donc que $0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz$ ce qui, par définition de $I(\gamma, a)$ donne la formule. □

Dans toute la suite nous noterons $H(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω.

THÉORÈME II.1.3.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$f \in H(\Omega)$;*
2. *f est analytique (complexe) dans Ω (donc en particulier $\mathscr{C}^\infty$). Plus précisément, si $D(z_0, r_0)$ est un disque ouvert contenu dans Ω, f est développable en série entière $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ de rayon de convergence $\geq r_0$. De*

plus, les coefficients a_n de cette série sont donnés par la formule

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

pour tout $r \in]0, r_0[$.

Remarque. On notera que, par la formule de Stokes l'intégrale de la formule donnant la valeur de a_n est indépendante de r.

Démonstration. Soit $r \in]0, r_0[$ de sorte que $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, r_0) \subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy (Théorème II.1.2) donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta.$$

Comme $\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, on a $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_n \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}$, la série convergeant normalement pour $(z, \zeta) \in D(z_0, r') \times \{|\zeta - z_0| = r\}$ si $0 < r' < r$. Ainsi, pour $|z - z_0| < r'$, on a

$$f(z) = \sum_n (z - z_0)^n \left[\int_{\{|\zeta - z_0| = r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right]$$

ce qui prouve que 1. implique 2., la réciproque étant l'Exemple II.1.1. □

COROLLAIRE 1.

Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, les dérivées successives $f^{(n)}$ de f sont holomorphes dans Ω.

Démonstration. Ceci résulte du Théorème et d'une propriété classique des séries entières. □

COROLLAIRE 2 (Formule de Cauchy pour un compact à bord orienté).

Si $f \in H(\Omega)$ et si K est un compact à bord orienté contenu dans Ω, pour tout point a dans l'intérieur de K on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 0 \text{ et } f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Démonstration. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, la forme localement exacte $f(z)dz$ (Théorème II.1.1) est fermée et la première formule résulte de la formule de Stokes (Théorème I.2.3).

Pour la seconde formule, on considère un disque $D(a, r)$ contenu dans l'intérieur de K. Alors la formule de Stokes (Théorème I.2.3) donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} dz - \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z - a} dz = 0$$

(la forme $\frac{f(z)}{z-a}dz$ étant fermée au voisinage de $K \setminus D(a, r)$) et il suffit d'appliquer la formule de Cauchy (Théorème II.1.2) puisque $I(\partial D(a, r), a) = 1$. □

Si K est un compact à bord orienté dans $\mathbb{C}$, K est l'adhérence de son intérieur et on peut vérifier qu'il existe une suite K_n de compacts à bord orientés contenus dans l'intérieur de K dont la frontière converge uniformément vers celle de K. En appliquant le Corollaire ci-dessus on obtient (Proposition I.3.2) :

COROLLAIRE 3 (Formule de Cauchy pour un compact à bord orienté).

Soit K un compact à bord orienté dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur K holomorphe à l'intérieur de K. Alors, pour tout point a dans l'intérieur de K on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 0 \text{ et } f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

THÉORÈME II.1.4 (Théorème de Morera).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout lacet γ homotope à un point dans Ω, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*
2. *Pour tout rectangle fermé R contenu dans Ω, $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$.*
3. *Pour tout triangle fermé T contenu dans Ω, $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$.*

4. *Si K est un compact à bord orienté contenu dans Ω, $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$.*
5. *La 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte dans Ω.*
6. *$f \in H(\Omega)$.*

Démonstration. Si $f \in H(\Omega)$, nous venons de voir que f est $\mathscr{C}^\infty$, et comme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, la forme $f(z)dz$ est fermée donc localement exacte (Proposition I.1.5). Il en résulte que la condition 6. implique toutes les autres (Théorème I.3.1, pour 1., Théorème I.2.2, pour 2. et 3., et la formule de Stokes, Théorème I.2.3, pour 4.), que 5. implique 1., 2. et 3. et que 5. est conséquence de chacune des autres. De plus, clairement 4. implique 3. qui équivaut à 2. (c.f. preuve de Théorème I.2.2) et 1. implique 3. Pour conclure, il suffit de voir que 5. implique 6. Or si 5. est satisfaite et si g est une primitive locale de $f(z)dz$ alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ ce qui signifie que g est holomorphe et donc $g' = f$ aussi. □

Remarque II.1.1. On notera que ce Théorème et le Théorème de Cauchy (Théorème II.1.1) montrent, par exemple, qu'une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui est holomorphe en dehors d'une droite est automatiquement holomorphe dans Ω.

PROPOSITION II.1.1.
Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω ne s'annulant pas. Alors il existe une fonction h holomorphe dans Ω telle que $e^h = f$.

Démonstration. En effet, puisque f ne s'annule pas la fonction f'/f est holomorphe sur Ω et, comme celui-ci est simplement connexe, d'après le Théorème II.1.1, elle admet une primitive (définie à une constante près) holomorphe dans Ω. Soit donc h la primitive de f'/f telle que $e^{h(z_0)} = f(z_0)$ en un point z_0 de Ω. Alors on a $\left(fe^{-h}\right)' = f'e^{-h} - h'fe^{-h} = 0$ c'est-à-dire $f = e^h + C$, $C \in \mathbb{C}$, et on doit avoir $C = 0$ puisque $e^{h(z_0)} = f(z_0)$. □

II.2 *Premières propriétés des fonctions holomorphes*

La Proposition suivante est une re-formulation du Théorème II.1.3 :

PROPOSITION II.2.1.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ et z_0 un point de Ω. Soit $D(z_0, r)$ le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω. Alors la série de Taylor de f en z_0, $\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$ converge uniformément sur tout disque fermé contenu dans $D(z_0, r)$ vers f.

PROPOSITION II.2.2.
La somme et le produit de deux fonctions holomorphes dans Ω est holomorphe dans Ω. Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 et si $f(z_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe au voisinage de z_0.

Démonstration. En effet, $\frac{1}{f}$ est évidement $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de z_0 et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{f}\right) = 0$. □

Remarque II.2.1. Une fonction holomorphe réelle ou imaginaire pure est constante.

En effet, si f est une fonction holomorphe réelle alors $0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$ et donc $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ soit $df = 0$.

PROPOSITION II.2.3 (Principe des zéros isolés).
*Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω, non identiquement nulle sur une composante connexe de Ω. Alors l'ensemble $Z(f) = \{z \in \Omega \text{ tels que } f(z) = 0\}$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω. De plus, pour chaque $z_0 \in Z(f)$ il existe un unique entier $m_0 \geq 1$ et une fonction g holomorphe dans Ω qui ne s'annule pas en z_0 tels que $f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z)$, $z \in \Omega$. L'entier m_0 s'appelle la **multiplicité** (ou l'**ordre**) du zéro z_0 de f. de plus $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\Omega \setminus Z(f)$.*

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$ le développement en série entière de f au voisinage de z_0. Si $a_n = 0$ pour tout entier n alors f est identiquement nulle au voisinage de z_0. Soit alors U l'ensemble des points de Ω au voisinage desquels f est identiquement nulle. U est donc un ouvert non vide de Ω sur lequel toutes les dérivées de f sont identiquement nulles. Alors si $z_1 \in \overline{U} \cap \Omega$, par continuité, toutes les dérivées de f sont nulles en z_1. Par suite, le développement de f en série entière au voisinage de z_1 est identiquement ce qui montre que U est fermé dans Ω. Ainsi U est une composante connexe de Ω ce qui contredit l'hypothèse faite sur f.

Il existe donc un entier n tel que $a_n \neq 0$. Soit alors $m_0 \geq 1$ le plus petit entier n tels que $a_n \neq 0$. On a donc

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} a_{m_0} \left[1 + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{m_0}} (z - z_0)^{n-m_0}\right],$$

la série entière $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{m_0}} (z - z_0)^{n-m_0}$ convergeant uniformément au voisinage de z_0. Ceci montre que la fonction $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m_0}}$ est holomorphe au voisinage de z_0, ne s'annule pas en z_0, et, comme elle est clairement holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, elle est holomorphe sur Ω (Proposition précédente). Enfin l'unicité de l'entier m_0 est évidente. □

COROLLAIRE.

Soient f et g deux fonction holomorphes sur un ouvert connexe Ω. Si l'ensemble des points z de Ω tels que $f(z) = g(z)$ a un point d'accumulation dans Ω alors f est identiquement égale à g. De plus s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout entier n on ait $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ alors f et g sont identiquement égales dans Ω.

Démonstration. D'après la Proposition, la première partie est évidente et la seconde résulte du fait que f et g ont même développement de Taylor en z_0 (donc même développement en série entière) donc sont égales au voisinage de z_0. □

PROPOSITION II.2.4.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Si est bornée au voisinage de z_0 alors f est holomorphe dans Ω (i.e. se prolonge holomorphiquement au point z_0).

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Soient $\zeta \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $|\zeta - z_0| > \varepsilon_0$. La formule de Cauchy (Corollaire 2 du Théorème II.1.3) donne, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi.$$

Par hypothèse, on peut choisir $\varepsilon_0 > 0$ tel que f soit bornée par une constante M sur $D(z_0, \varepsilon_0)$, et, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$ on a $|\xi - \zeta| \geq \varepsilon_0/2$ pour $|\xi - z_0| = \varepsilon$. Par suite $\left|\int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi\right| \leq \frac{4\pi M\varepsilon}{\varepsilon_0}$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi$ pour tout $\zeta \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, ce qui montre que f se prolonge holomorphiquement au point z_0 (cette dernière intégrale étant développable en série entière dans $D(z_0, r)$). □

PROPOSITION II.2.5.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Alors l'une des trois possibilités suivantes est satisfaite :

1. *f est holomorphe dans Ω.*
2. *Il existe un entier m et des nombres complexes c_i, $1 \leq i \leq m$, uniques, tels que la fonction $g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-z_0)^i}$ soit holomorphe dans Ω. Dans ce cas on dit que f est **méromorphe** au point z_0.*
3. *Si $D(z_0, r)$ est contenu dans Ω, $r > 0$, $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas on dit que f a une **singularité essentielle** en z_0.*

Remarque. À la fin de ce cours, nous verrons que dans le cas 3. on a un résultat beaucoup plus fort (Grand Théorème de Picard) : $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ contient tout $\mathbb{C}$ moins au plus un point et tout point de $\mathrm{Im} f$ est atteint une infinité de fois.

Démonstration. Si 3. est faux, il existe $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\delta > 0$ tels que, dans l'ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ on a $|f(z) - w| \geq \delta$. Alors la fonction $h(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ est holomorphe dans $\{0 < |z - z_0| < r\}$ et est bornée au voisinage de z_0. La Proposition précédente dit alors que h est holomorphe dans $D(z_0, r)$. Si $h(z_0) \neq 0$, f est bornée au voisinage de z_0 et on est dans le cas 1. (Proposition précédente). Supposons donc $h(z_0) = 0$ et soit m la multiplicité de z_0 de sorte que $h(z) = (z - z_0)^m h_1(z)$ avec $h_1(z_0) \neq 0$ et $f_1 = \frac{1}{h_1}$ est holomorphe au voisinage de z_0. Ainsi on a $f(z) = w + (z - z_0)^{-m} f_1(z)$ au voisinage de z_0, et le développement en série entière de f_1 montre que l'on est dans le cas 2. □

PROPOSITION II.2.6.

Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω, z_0 un point de Ω et $D(z_0, R)$ un disque ouvert contenu dans Ω. Alors si $f(z) = \sum_n a_n (z-z_0)^n$ est le développement en série entière de f dans $D(z_0, R)$, pour $0 < r < R$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{i\vartheta}\right) \right|^2 d\vartheta.$$

*En particulier, pour tout n, $|a_n| \leq \frac{\sup_{\{|z-z_0|=r\}} |f|}{r^n}$ (**Inégalités de Cauchy**).*

Démonstration. C'est simplement la formule de Parseval appliquée à la fonction $\vartheta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{in\vartheta}$. □

COROLLAIRE 1 (Théorème de Liouville).

*Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ (une telle fonction est appelée une **fonction entière**). Si f est bornée elle est constante.*

Démonstration. En effet, d'après la Proposition, si $|f| \leq M$, les coefficients du développement en série entière de f dans $\mathbb{C}$ vérifient $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout $r > 0$, ce qui donne $a_n = 0$ si $n > 0$. □

COROLLAIRE 2 (Théorème de D'Alembert).

Soit P un polynôme à coefficients complexes non constant. Alors P a une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. En effet, si P ne s'annule pas, $\frac{1}{P}$ est holomorphes dans $\mathbb{C}$, et comme $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ si P n'est pas constant, $\frac{1}{P}$ est bornée et la conclusion résulte du Théorème de Liouville. □

PROPOSITION II.2.7 (Principe du maximum (local)).

Soit f une fonction holomorphe dans ouvert connexe Ω. S'il existe $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que, pour tout z appartenant au disque centré en z_0 et de rayon r on ait $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, alors f est constante dans Ω.

Démonstration. Soit $0 < r_1 < r$. Si $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ est le développement en série de f au voisinage de z_0, la formule de Parseval (Proposition II.2.6) donne $\sum |a_n|^2 r_1^{2n} \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2$ et donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. La conclusion résulte donc du Corollaire du principe des zéros isolés (Proposition II.2.3). □

PROPOSITION II.2.8 (Principe du maximum (global)).

Soit f une fonction holomorphe dans ouvert connexe borné Ω, continue dans $\overline{\Omega}$. Soit $M = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. Alors :

1. *Pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| \leq M$.*
2. *S'il existe $a \in \Omega$ tel que $|f(a)| = M$ alors f est constante.*

Démonstration. Soit $\tilde{M} = \sup_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)|$. Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, $E = \left\{z \in \overline{\Omega} \text{ tels que } |f(z)| = \tilde{M}\right\}$ est non vide. Ainsi la Proposition précédente montre que, si f n'est pas constante, $E \cap \Omega = \emptyset$. On a donc $\tilde{M} = M$, et la Proposition s'en déduit. □

Remarque. Nous verrons plus tard que ces deux Propositions sont vraies pour toutes le fonctions qui vérifient la propriété de la moyenne, c'est-à-dire les fonctions harmoniques.

La Proposition qui suit est un cas particulier de la formule de Cauchy :

PROPOSITION II.2.9 (Propriété de la moyenne).

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{D(z_0, r_0)}$. Alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r_0 e^{i\vartheta}\right) d\vartheta.$$

Remarque II.2.2. La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe vérifient la propriété de la moyenne ci-dessus.

Nous verrons au chapitre suivant que les fonctions vérifiant le propriété de la moyenne sont les fonctions harmoniques, et que, dans $\mathbb{R}^2$, ce sont exactement les parties réelles (ou imaginaires) des fonctions holomorphes.

PROPOSITION II.2.10.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge, uniformément sur les compacts de Ω, vers une fonction f. Alors f est holomorphe dans Ω et la suite $\left(f'_j\right)_j$ converge, uniformément sur les compacts de Ω, vers f'.

Démonstration. En effet, par convergence uniforme, f est continue, et si Δ est un triangle fermé contenu dans Ω, la convergence implique $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, ce qui montre l'holomorphie de f (Théorème II.1.4). Enfin, si K est un compact de Ω et si $r > 0$ est tel que, pour tout point $z \in K$, le disque $D(z,r)$ soit contenu dans un compact $\tilde{K}$ contenu dans Ω, les inégalités de Cauchy (Proposition II.2.6) donnent $\left|f'(z) - f_j'(z)\right| \leq \frac{1}{r}\left\|f - f_j\right\|_{\tilde{K}}$, ce qui montre la dernière assertion. □

Corollaire (Théorème de Montel).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. L'espace $H(\Omega)$ est un espace de Montel pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω (i.e. si $(f_j)_j$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui est uniformément bornée sur chaque compact de Ω (mais pas nécessairement sur Ω), alors il existe une sous-suite $\left(f_{j_p}\right)_p$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω).

Démonstration. En effet, ceci résulte de la Proposition et du Théorème d'Ascoli, car, si K est un compact de Ω et si, comme dans la preuve précédente, $r > 0$ est tel que, pour tout point $z \in K$, le disque $D(z,r)$ soit contenu dans un compact $\tilde{K}$ contenu dans Ω, les inégalités de Cauchy donnent $\sup_K \left|f_j'\right| \leq \frac{1}{r}\sup_{\tilde{K}}\left|f_j\right|$, et la formule de accroissements finis montre que la suite $(f_j)_j$ est équicontinue sur K. □

Proposition II.2.11 (Principe de symétrie de Schwarz).

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel. Soient $\Omega^+ = \{z \in \Omega$ tels que $\Im\mathrm{m} z \geq 0\}$ et $\Omega^- = \{z \in \Omega$ tels que $\Im\mathrm{m} z \leq 0\}$. Soit f une fonction continue dans Ω^+, holomorphe dans l'intérieur de Ω^+ et réelle sur $\Omega \cap \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $\tilde{f}$ holomorphe dans Ω telle que $\tilde{f}_{|\Omega^+} = f$. De plus, pour tout $z \in \Omega^-$ on a $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Démonstration. En effet, l'unicité est évidente, et, si $\tilde{f}$ est le fonction égale à f sur Ω^+ et à $\overline{f(\bar{z})}$ sur Ω^-, cette fonction est clairement continue sur Ω, $\mathscr{C}^\infty$ dans $\Omega \setminus \mathbb{R}$, et, comme, en un point z intérieur à Ω^- on a $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\tilde{f}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{z})\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}} = 0$, elle est holomorphe dans l'intérieur de Ω^- donc finalement holomorphe dans Ω d'après la Remarque II.1.1. □

Proposition II.2.12 (Lemme de Schwarz).

Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1\}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors :

1. *Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|f(z)| \leq |z|$.*
2. *$|f'(0)| \leq 1$.*
3. *S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe une constante λ, $|\lambda| = 1$, telle que, $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \lambda z$.*
4. *Si $|f'(0)| = 1$, il existe une constante λ, $|\lambda| = 1$, telle que, $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \lambda z$.*

Démonstration. En effet, l'hypothèse $f(0) = 0$ implique que le fonction $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$, et, la seconde hypothèse sur f implique que pour $0 < \varepsilon < 1$, si $|z| = 1 - \varepsilon$, on a $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$. Le principe du maximum global (Proposition II.2.8) donne alors $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui donne le 1. et le 2. Sous l'hypothèse du 3., le principe du maximum local (Proposition II.2.7) montre que $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est constante, c'est-à-dire qu'il existe une constante λ telle que $f(z) = \lambda z$, et comme $|f(z_0)| = |z_0|$, on a $|\lambda| = 1$. Enfin, l'hypothèse du 4. montre que $\frac{f(z)}{z}$ a un maximum local au point 0 et on conclut de même. □

II.3 Séries de Laurent et Théorème de l'application ouverte

Définition II.3.1.

Soit $C = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2 \leq \infty\}$ une couronne dans le plan complexe. On appelle *série de Laurent* dans C une série de fonctions de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ telle que :

1. la série entière $\sum_0^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge dans le disque $\{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| < r_2\}$;

2. la série entière $\sum_1^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$ converge dans le disque $\left\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-z_0| < \frac{1}{r_1}\right\}$.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge normalement dans toute couronne fermée $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } r_1' < |z-z_0| < r_2'\}$, $0 \leq r_1 < r_1' \leq r_2' < r_2 \leq +\infty$.

Proposition II.3.1.

Soit $C = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $0 \leq r_1 < |z-z_0| < r_2 \leq \infty\}$ une couronne dans le plan complexe.

1. *La somme f d'une série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans C est une fonction holomorphe dans C. De plus, pour tout entier n, si $r_1 < r < r_2$, on a $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f\left(z_0 + re^{i\vartheta}\right) d\vartheta$.*
2. *Si f est une fonction holomorphe dans C, il existe une unique série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans C dont la somme est égale à f (on dit que cette série est le* ***développement en série de Laurent*** *de f dans C).*

Démonstration. Comme la série du 1. converge uniformément sur tout compact de C, l'holomorphie de sa somme résulte su Théorème de Morera (Théorème II.1.4). Montrons maintenant le 2. ainsi que la formule du 1. Soient r_1' et r_2' tels que $r_1 < r_1' < r_2' < r_2$. La formule de Cauchy (Théorème II.1.2) donne, pour $r_1' < |z-z_0| < r_2'$,

$$2i\pi f(z) = \int_{\{|\zeta-z_0|=r_2'\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La première intégrale de cette équation se développe en série entière dans le disque $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-z_0| < r_2'\}$ (voir la preuve du Théorème II.1.3). Pour la seconde, on refait une preuve similaire :

$$\int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{-1}{z-z_0} \int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} \frac{f(\zeta)}{\left(1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} d\zeta,$$

et comme $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$, on a $\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_0^{+\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$, la convergence étant normale dans tout compact contenu dans

$$\left\{z \text{ tels que } \left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1\right\}$$

c'est-à-dire dans toute couronne contenue dans $\{|z-z_0| > r_1'\}$. Ainsi, la seconde intégrale de la formule vaut

$$\int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{-1}{(z-z_0)^{n+1}} \int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} (\zeta-z_0)^n f(\zeta)\, d\zeta,$$

et la série converge dans toute couronne $\{|z-z_0| > r_1'\}$. Enfin la formule du 1. résulte du fait que l'intégrale

$$\int_{\{|\zeta-z_0|=r_1'\}} (\zeta-z_0)^n f(\zeta)\, d\zeta$$

est indépendante de r_1' par le Théorème de Cauchy (Théorème II.1.1). □

Définition II.3.2.

Soit C une couronne de la forme $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } 0 < |z-z_0| < r \leq +\infty\}$. Soit f une fonction holomorphe dans C et soit $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ son développement en série de Laurent. Le coefficient a_{-1} de cette série s'appelle le *résidu* de f en z_0 et sera noté $\mathrm{Res}(f; z_0)$. De plus :

1. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}_*$ tel que $a_{-n_0} \neq 0$, on dit que f a une singularité en z_0 (ou que z_0 est une singularité de f), et :
   (a) si $a_n = 0$ pour tout $n < -n_0$, on dit que f a un *pôle* en z_0 d'*ordre* (*de multiplicité*) n_0 ;
   (b) sinon on dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f.
2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω privé d'un un sous-ensemble *discret* A (i.e. sans point d'accumulation dans Ω ou encore dont tout point est isolé dans Ω).
   (a) Le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent de f en un point a de A s'appelle le *résidu* de f au point a et sera noté $\mathrm{Res}(f; a)$.
   (a) On dit que f est *méromorphe* dans Ω si tout point de A est un pôle de f.

On notera que cette Définition est en accord avec celle introduite à la Proposition II.2.5.
La remarque suivante résulte aussitôt de la théorie des séries entières :

PROPOSITION II.3.2.

Si f est une fonction méromorphe dans Ω alors sa dérivée f' est aussi méromorphe dans Ω.

Les exemples suivants résultent du principe des zéros isolés (Proposition II.2.3) :

PROPOSITION II.3.3.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. *Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans Ω, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est méromorphe dans Ω.*
2. *Soient a un point de Ω et f une fonction holomorphe dans Ω.*
   (a) *Si f a un zéro d'ordre m en a alors $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},a\right)=m$;*
   (b) *si a un pôle d'ordre m en a alors $\frac{1}{f}$ a un zéro d'ordre m en a et $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},a\right)=-m$.*

Démonstration. En effet, $\frac{1}{g}$ est holomorphe en dehors des zéros de g et si g s'annule en a alors $g(z)=(z-a)^k h(z)$, h ne s'annulant pas au voisinage de a, ce qui montre que $\frac{1}{g}$ est méromorphe au voisinage de a. Pour 2. (a), on a $f(z)=(z-a)^m g(z)$, où g ne s'annule pas en a. Donc $\frac{f'}{f}=\frac{m}{z-a}+\frac{g'}{g}$ et $\frac{g'}{g}$ est holomorphe au voisinage de a. Dans le cas 2. (b), on a $f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z)$ d'où $\frac{f'}{f}=\frac{-m}{z-a}+\frac{g'}{g}$. □

Nous verrons plus tard que toute fonction méromorphe dans un ouvert simplement connexe est le quotient de deux fonctions holomorphes dans l'ouvert.

THÉORÈME II.3.1 (Théorème des Résidus).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient z_i, $1\le i\le n$ des points deux-à-deux distincts de Ω. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega\setminus\{z_i,\ 1\le i\le n\}$. Soit γ un lacet dans $\Omega\setminus\{z_i,\ 1\le i\le n\}$ homotope à un point dans Ω. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{i=1}^n I(\gamma,z_i)\operatorname{Res}(f;z_i).$$

Démonstration. Pour chaque i, écrivons

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{-1}c_k^i(z-z_i)^k+\sum_0^{+\infty}c_k^i(z-z_0)^k=Q_i+\sum_0^{+\infty}c_k^i(z-z_0)^k$$

le développement en série de Laurent de f au point z_i, la série Q_i convergeant dans $\{|z-z_i|>0\}$. Alors $f-Q_i$ est holomorphe au voisinage de z_i et, donc, $f-\sum_{i=1}^n Q_i$ est holomorphe dans Ω. Le Théorème de Cauchy (Théorème II.1.1) donne donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_i\int_\gamma Q_i(z)\,dz.$$

Comme Q_i est une série qui converge uniformément (et même normalement) dans $\{|z-z_0|\ge\varepsilon>0\}$, on a

$$\int_\gamma Q_i(z)\,dz=\sum_{-\infty}^{-1}c_k^i\int_\gamma(z-z_i)^k\,dz,$$

et, si $k\ne-1$, la forme $(z-z_i)^k\,dz$ étant exacte dans $\{|z-z_i|>0\}$, on a $\int_\gamma(z-z_i)^k\,dz=0$. D'où le résultat, par définition de l'indice (Définition I.2.3). □

PROPOSITION II.3.4 (Théorème des Résidus).

Soit A un sous-ensemble discret d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit K un compact à bord orienté dans Ω dont la frontière ne rencontre pas A. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega\setminus A$. Alors, en notant $A\cap\overset{\circ}{K}=\{z_i\,1\le i\le n\}$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}f(z)\,dz=\sum_{i=1}^n\operatorname{Res}(f;z_i).$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du Théorème précédent en remarquant que la formule de Stokes (Théorème I.2.3) donne $\int_{\partial K}(f(z)-\sum_i Q_i(z))\,dz=0$. □

PROPOSITION II.3.5 (Théorème de Rouché).

Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert Ω et $a \in \Omega$. Soit K un compact à bord orienté contenu dans Ω. On suppose que f n'a pas de pôles sur le bord de K et que $a \notin f(\partial K)$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = Z - P,$$

où Z désigne la somme des ordres de multiplicité des zéros de $f-a$ dans l'intérieur de K et P la somme des ordres des pôles de f dans cet intérieur.

Démonstration. Soit $g(z) = f(z) - a$. Par hypothèse g ne s'annule pas sur ∂K, donc elle est méromorphe sur Ω et $\frac{1}{g}$ est méromorphe sur un voisinage ouvert U de K tel que les pôles de $\frac{1}{g}$ dans U sont en nombre fini et contenus dans l'intérieur de K ainsi que les zéros de g. Alors les pôles de $\frac{g'}{g}$ dans U vérifient la même propriété. On applique alors la formule de la Proposition précédente, les z_i étant les pôles de $\frac{g'}{g}$ dans U et pour conclure, il suffit d'appliquer le 2. de la Proposition II.3.3. □

THÉORÈME II.3.2 (Théorème de l'application ouverte).

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de Ω et f une fonction holomorphe dans Ω **non constante** dans un voisinage de z_0. On pose $a = f(z_0)$. Soit k l'ordre du zéro z_0 de $f-a$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour $0 < |a-b| < \delta$ l'équation $f(z) = b$ a exactement k racines deux-à-deux distinctes dans le disque $\{|z-z_0| < \varepsilon\}$.*

Ainsi il existe un voisinage ouvert $V \subset \{|z-z_0| < \varepsilon\}$ de z_0 et un voisinage ouvert W de a tels que $f(V) = W$. En particulier f est une application ouverte.

Démonstration. Comme f est non constante dans un voisinage de z_0, d'après le principe des zéros isolés (Proposition II.2.3) on peut trouver $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour $|a-b| < \delta$ les fonctions $f-b$ et f' ne s'annulent pas dans $\{0 < |z-z_0| \leq \varepsilon\}$. Par suite $b \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|z-z_0|=\varepsilon\}}\frac{f'(z)}{f(z)-b}dz$ est une fonction continue sur $\{|a-b| < \delta\}$, et, comme elle prend des valeurs entières (Théorème de Rouché ci-dessus), elle est constante égale à k. Le Théorème de Rouché dit donc que, pour $b \neq a$, $f-b$ a k racines (multiplicités comprises) dans $\{0 < |z-z_0| \leq \varepsilon\}$. Enfin, comme, par construction, f' ne s'annule pas dans cet ensemble, ces racines sont toutes simples. □

Remarque. On notera que ce résultat redémontre le principe du maximum local (de façon plus précise) et que celui-ci s'applique à $\Re e f$ et $\Im m f$, ce que nous reverrons au chapitre suivant.

COROLLAIRE.

*Dans les conditions du Théorème, si de plus $f'(z_0) \neq 0$ alors f est bijective de V sur W et f' ne s'annule pas dans V. Ainsi, f est un difféomorphisme de V sur W et f^{-1} est holomorphe sur W. On dit que f est un **biholomorphisme** de V sur W.*

Démonstration. Le Théorème dit que f est bijective et comme df ne s'annule pas sur V, f est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme par le Théorème d'inversion locale. Soit $g = f^{-1}$. Comme $f(g(w)) = w$ sur W, en dérivant par rapport à $\overline{w}$, il vient $\frac{\partial f}{\partial z}(g(w))\frac{\partial g}{\partial \overline{w}} = 0$ puisque f est holomorphe. Comme $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$ ne s'annule pas sur V, il vient donc $\frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \equiv 0$ sur W ce qui signifie que f^{-1} est holomorphe. □

Dans les conditions du Corollaire, f^{-1} est donc développable en série entière au voisinage de $f(z_0)$. On peut donc essayer de chercher directement f^{-1} sous forme d'une série entière. En utilisant alors la méthode dite des « *séries majorantes* », on peut obtenir une information sur la taille de W. Nous allons rapidement décrire cette méthode maintenant. Pour simplifier les notations, par translation et homothétie, on peut supposer $z_0 = 0$ et $f'(0) = 1$. Le point de départ de la méthode est le Lemme formel suivant (dont la démonstration, que nous ne ferons pas, ne pose aucune difficulté) :

Lemme II.3.1. *Il existe une suite universelle de polynômes $P_k \in \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_{k-1}]$, $k \geq 2$, telle que, pour toute série entière de rayon de convergence > 0 s'écrivant $S(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, si, pour tout $n \geq 2$, on pose $G_n(w) = w + \sum_{k=2}^{n} P_k(a_2, \ldots, a_k) w^k$, les fonction (qui sont holomorphes au voisinage de l'origine) $z \mapsto G_n(S(z)) - z$ et $w \mapsto S(G_n(w)) - w$ s'annulent en 0 ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq n$.*

Écrivons alors le développement de f au voisinage de 0 sous la forme $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ et notons $r > 0$ le rayon de convergence de cette série. La théorie des séries entière nous assure qu'il existe un nombre $M \geq 1/r$ tel que, pour tout $n \geq 2$, on a $|a_n| \leq M^n$. Considérons alors la série entière $k(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} M^n z^n$. Cette série étant géométrique, la calcul de sa somme montre immédiatement que l'équation (en z) $w = k(z)$ est une équation du second degré dont la solution $z(w)$ holomorphe au voisinage de l'origine est la fonction $h(w) = \frac{1+Mw-\sqrt{(1+Mw)^2-4w(M+M^2)}}{2(M+M^2)}$, où la racine désigne la racine carrée qui est holomorphe sur le disque $D(1,1)$ valant 1 au point 1. Soit $h(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n$ le développement en série entière de h au voisinage de l'origine. Posons $h_n(w) = w + \sum_{k=2}^{n} b_k w^k$. D'après le Lemme, si on pose $\widetilde{h}_n(w) = w +$

$\sum_{k=2}^{n} P_k\left(M^2,\ldots,M^n\right)w^k$, on a $k\left(h_n(w)\right)-k\left(\widetilde{h}_n(w)\right)=\mathrm{O}\left(|w|^n\right)$, et, comme k est inversible au voisinage de l'origine (par le Corollaire précédent), on a $h_n(w)-\widetilde{h}_n(w)=\mathrm{O}\left(|w|^n\right)$, ce qui montre que le développement de h au voisinage de l'origine est $h(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty} P_n\left(M^2,\ldots,M^n\right)w^n$. Comme la fonction h est explicite, en écrivant $h(w)=\frac{1+Mw-\sqrt{1-w'(w)}}{2\left(M+M^2\right)}$, le rayon de convergence de son développement est est supérieur à celui donné par la condition $|w'(w)|<1$ c'est-à-dire

$$|w|<R=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)M+4M^2}.$$

Comme les coefficients des polynômes P_k sont des entiers positifs ou nuls, le rayon de convergence de la série $g(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty} P_n\left(a_2,\ldots,a_n\right)w^n$ est $\geq R$, et, d'après le Lemme, $f\circ g-\mathrm{Id}$ et $g\circ f-\mathrm{Id}$ ont un zéro d'ordre infini à l'origine. Comme on vérifie facilement que $|h(w)|<1/M$ pour $|w|<R$, on a aussi $|g(w)|<1/M$ sous la même condition, ceci implique $f^{-1}=g$. On a ainsi obtenu le résultat quantitatif suivant :

PROPOSITION II.3.6.

Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(z_0,r)$, $r>0$, telle $f'(z_0)\neq 0$. Soit $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\left[(z-z_0)-\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right]$ le développement en série entière de f dans $D(z_0,r)$. Soit $M\geq 1/r$ tel que, pour tout $n\geq 2$, $|a_n|\leq M^n$. Alors il existe un voisinage ouvert V de z_0 contenu dans $D(z_0,r)$ tel que $f_{|V}$ soit un biholomorphisme de V sur le disque $D(f(z_0),R)$, avec $R=|f'(z_0)|\frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$.

PROPOSITION II.3.7 (Théorème de Rouché).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact à bord orienté contenu dans Ω et f et g deux fonctions holomorphes dans Ω. Si $|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$ sur ∂K (auquel cas f et g ne s'annulent pas sur ∂K), les fonction f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de K.

Démonstration. En effet, si γ est un paramétrage positivement orienté de ∂K, d'après le Théorème de Rouché (Proposition II.3.5) ces nombre de zéros sont les indices $I(\gamma_1,0)$ et $I(\gamma_2,0)$ où $\gamma_1=f\circ\gamma$ et $\gamma_2=g\circ\gamma$ et le résultat à été vu à la Proposition I.4.5. □

II.4 Le Théorème de Phragmen-Lindelöf

Dans cette dernière section nous donnons un exemple classique de « principe du maximum global » pour une fonction holomorphe sur un ouvert *non borné* de $\mathbb{C}$, et montrons, par un exemple que ce principe n'est pas vrai, en général, dans ce contexte :

THÉORÈME II.4.1 (Théorème de Phragmen-Lindelöf).

*Soit $\Omega=\{z\in\mathbb{C}$ tels que $-\infty<a<\Re ez<b<+\infty\}$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω, continue dans $\overline{\Omega}$ et **bornée**. Pour $a\leq x\leq b$, on pose $M(x)=\sup_{\Re ez=x}|f(z)|$. Alors, pour $a<x<b$, on a*

$$M(x)^{b-a}\leq M(a)^{b-x}M(b)^{x-a}.$$

En particulier, $M(x)\leq\max\{M(a),M(b)\}$ ce qui est le « principe du maximum global », mais il faut noter que l'inégalité donne un renseignement plus fort puisque, en particulier, si $M(a)$ ou $M(b)$ est nul, alors f est identiquement nulle.

Si on supprime l'hypothèse « f est bornée sur Ω », il se peut que f soit bornée sur le bord de Ω sans être bornée sur Ω comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. Prenons $a=0$ et $b=1$ dans la définition de Ω dans le Théorème et $f(z)=e^{e^{\left(i\pi z-i\frac{\pi}{2}\right)}}$. On a alors $f(iy)=e^{-e^{-\pi y}}$ et $f(1+iy)=e^{ie^{-\pi y}}$ de sorte que $|f(z)|=1$ si z appartient au bord de Ω. Par contre $f\left(\frac{1}{2}+iy\right)=e^{e^{-\pi y}}$ est non bornée.

Démonstration. Supposons tout d'abord $M(a)M(b) > 0$ et considérons le cas $M(a) = M(b) = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ posons $h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+\varepsilon(z-a)}$. On vérifie aussitôt que $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ sur $\bar{\Omega}$, et, par suite, pour $z \in \partial\Omega$, $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$. D'autre part, $|1+\varepsilon(z-a)| \geq \varepsilon\,|\Im\mathrm{m} z|$, et, si $|f| \leq B$ sur Ω (hypothèse !), en tout point z de Ω on a $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \frac{B}{\varepsilon|\Im\mathrm{m} z|}$. Considérons alors le rectangle $R_\varepsilon = \Omega \cap \left\{|\Im\mathrm{m} z| \leq \frac{B}{\varepsilon}\right\}$. D'après ce qui précède, on a $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ sur la frontière de R_ε, et le principe du maximum global (Proposition II.2.8) dit que cette inégalité reste vrai sur R_ε. Soit ζ un point de Ω fixé. Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ on a $\zeta \in R_\varepsilon$ et donc $|f(\zeta)h_\varepsilon(\zeta)| \leq 1$. Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\zeta) = 1$, on a $|f(\zeta)| = 1$ ce qui prouve le Théorème dans ce cas.

Pour le cas général, lorsque $M(a)M(b) > 0$, considérons la fonction $g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}$. g est holomorphe sur Ω, ne s'annule pas et

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{b-z}{b-a}\log M(a)\right) \text{ et } \Re\mathrm{e}\left(\frac{z-a}{b-a}\log M(b)\right)$$

sont minorés sur $\overline{\Omega}$ de sorte que $1/g$ est bornée sur $\overline{\Omega}$ et donc aussi f/g. Comme $|g(z)| = M(a)$ sur $\{\Re\mathrm{e} z = a\}$ et $|g(z)| = M(b)$ sur $\{\Re\mathrm{e} z = b\}$, f/g vérifie les hypothèses du cas particulier traité précédemment donc $|f/g| \leq 1$ sur Ω ce qui est le résultat cherché.

Reste le cas $M(a)M(b) = 0$. Alors il existe clairement une suite ε_n de réels positifs qui tends vers 0 telle que si on remplace f par $f + \varepsilon_n$ on a, pour cette nouvelle fonction, $M(a)M(b) > 0$, ceci pour tout n. On peut donc lui appliquer l'inégalité que nous venons de démontrer. Comme, pour chaque $x \in [a,b]$, la suite de fonctions $y \mapsto f(x+iy) + \varepsilon_n$ converge vers $y \mapsto f(x+iy)$ uniformément sur $\mathbb{R}$, la démonstration est terminée. □

Exercices

EXERCICE II.1 (formule de Cauchy).
Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{|\zeta+i|=3} \sin\zeta \frac{d\zeta}{\zeta+i}, \int_{|\zeta|=4} \frac{\cos\zeta}{\zeta^2-\pi^2}, \int_{|\zeta|=2} \frac{d\zeta}{(\zeta-1)^n(\zeta-3)},$$

les chemins d'intégration mentionnés étant parcourus une seule fois dans le sens trigonométrique.

EXERCICE II.2 (holomorphie et formule de Cauchy).
Soit f une fonction à valeurs complexes définie et continue dans la couronne fermée $\overline{C_{r,R}} := \{r \leq |z| \leq R\}$ du plan complexe (où $r < R$ sont deux nombres strictement positifs), holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{r < |z| < R\}$. On note respectivement γ_r et γ_R les lacets $t \in [0,1] \mapsto re^{2i\pi t}$ et $t \in [0,1] \mapsto Re^{2i\pi t}$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) \qquad \forall z \in C_{r,R}.$$

En déduire, pour tout $z \in C_{r,R}$, les formules de représentation « approchées » :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big) = -\frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{\gamma_r} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)}\,d\zeta\Big).$$

EXERCICE II.3 (holomorphie et formule de Cauchy).
Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une unique fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall r > 0,\ F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \forall z \in D(0,r),$$

où $\gamma_r\ : t \in [0,1] \longmapsto re^{2i\pi t}$. Quelle est la fonction F lorsque $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$?

EXERCICE II.4 (holomorphie et formule de Cauchy).
Soit $I = [ia, ib]$ un intervalle fermé de l'axe imaginaire du plan complexe (avec $a < b$) et f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de I. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus I$, on pose

$$\Phi(z) := \frac{1}{2i\pi}\int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

Montrer que la fonction Φ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus I$ et que, pour tout z dans I, on a

$$f(z) = \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \operatorname{Re} \zeta < 0}} \Phi(\zeta) = \lim_{\substack{\zeta \to z \\ \operatorname{Re} \zeta > 0}} \Phi(\zeta).$$

EXERCICE II.5 (développement en série entière et formules de Cauchy pour les coefficients de Taylor).
Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)}$, injective sur ce disque fermé. Montrer que $f \circ \gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto f(e^{2i\pi t})$ est un lacet continu simple et appliquer la formule de Green-Riemann pour montrer que la surface A_f du domaine enserré par le support de ce lacet vaut

$$A_f = \frac{1}{2i} \int_{f \circ \gamma} \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{f(\zeta)} f'(\zeta)\, d\zeta \text{ avec } \gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}.$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ est le développement de f au voisinage de 0, vérifier la relation

$$\sum_{n=1}^\infty n|a_n|^2 = \frac{A_f}{\pi} \le (\sup_{|z|=1} |f(z)|)^2.$$

EXERCICE II.6 (nombres de Bernoulli).
En faisant la division suivant les puissances croissantes de X par $\sum_{k \ge 1} X^k/k!$, on obtient

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} X^k,$$

où les B_k sont les *nombres de Bernouilli*. Quel est le rayon de convergence de la série entière $[(B_k/k!)z^k]_{k \ge 0}$?

EXERCICE II.7 (fonctions de Bessel).
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une collection de nombres complexes $(J_n(z))_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^*,\ \exp\left[\frac{z}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) \zeta^n.$$

Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k = \max(0,-n)} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Montrer enfin que J_n est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, solution de l'équation différentielle de Bessel

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0.$$

Exprimer en fonction de J_1 la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du disque unité.

EXERCICE II.8 (holomorphie et développement en série).
Existe-t-il une fonction f holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et telle que

$$f(1/n) = f(-1/n) = 1/(2n+1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$? Même question avec cette fois les contraintes

$$|f(1/n)| \le 2^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

EXERCICE II.9 (holomorphie et développement en série).
Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ et telle que $f''(1/n) = f(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

EXERCICE II.10 (dérivée d'une fonction holomorphe).
Soient $f_1, \ldots, f_m$ m fonctions holomorphes dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, telles que $\sum_{j=1}^n |f_j|^2$ soit une fonction constante dans U. Montrer qu'alors toutes les fonctions f_j, $j = 1, \ldots, m$, le sont aussi.

EXERCICE II.11 (série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique).
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $\mathbb{C}^*$ telle que $f(z) = g(e^{2i\pi z})$. Montrer que l'on a, pour tout w dans $\mathbb{C}^*$,

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k\,,$$

avec

$$a_k = \int_0^1 f(t+ib)e^{-2i\pi k(t+ib)}\,dt \qquad \forall b \in \mathbb{R}\,.$$

EXERCICE II.12 (holomorphie et développement en série).
Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ et R le maximum des modules de tous les pôles de F dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $|z| > R$, la fonction F se développe dans la couronne $\{|z| > R\}$ sous la forme

$$F(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k}\,, \tag{$*$}$$

où $m \in \mathbb{N}$, $a_m, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ et la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire. Réciproquement, si F est une fonction holomorphe dans une couronne $\{|z| > R\}$ se développant sous la forme $(*)$, où la suite $(a_{-k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ obéit à une relation de récurrence linéaire, peut-on affirmer que F est la restriction à la couronne $\{|z| > R\}$ d'une fraction rationnelle ?

EXERCICE II.13 (holomorphie et développement en série ; procédé sommatoire de Borel).

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans $D(0,R)$ $(R > 0)$. Montrer que l'on définit une fonction entière F en posant
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$
et que, l'on a, pour tout $r \in]0,R[$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(\zeta) e^{z/\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$
Vérifier aussi que pour tout $\rho \in]0,R[$, $|F(z)| = O(\exp(|z|/\rho)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.
2. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| = O(\exp(\kappa|z|))$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ (pour un certain $\kappa > 0$) et $b_n = F^{(n)}(0)/n!$ pour $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que le rayon de convergence de la série $[n! b_n z^n]_{n\geq 0}$ est au moins égal à $1/\kappa$.

EXERCICE II.14 (singularités essentielles ou non).
Quel est le type des singularités des fonctions suivantes

$$z \mapsto \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right),\ z \mapsto \operatorname{cotan} z - \frac{1}{z},\ z \mapsto z(e^{1/z} - 1)\,?$$

EXERCICE II.15 (singularités essentielles ou non).

1. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), telle que $|f(z)| \leq C|z|^{-1/2}$ lorsque $|z|$ tend vers 0. Montrer que la singularité de f en 0 est une singularité éliminable (c'est-à-dire que f peut se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de 0).
2. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée). Montrer que 0 est une singularité essentielle de f si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{r\to 0} [r^n (\sup_{|z|=r} |f(z)|)] = +\infty.$$
En déduire que si g est une fonction holomorphe au voisinage de 0, non identiquement nulle, et telle que $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ a une singularité essentielle en 0 dès que f en a une.
3. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), méromorphe à l'origine (c'est-à-dire présentant en 0 une singularité non essentielle, dite aussi pôle). Soit g une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ non polynomiale. Montrer que 0 est une singularité essentielle de $g \circ f$.
4. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine (l'origine est retirée), présentant une singularité essentielle en 0. Montrer que, si g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et non constante, $g \circ f$ présente une singularité essentielle en 0.

EXERCICE II.16 (inégalités de Cauchy et théorème de Liouville).
Soient f et g deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ et telles que $|f(z)| \leq C|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f = \lambda g$, où λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| \leq C$. Que peut-on dire d'une fonction entière f telle que $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}$?

EXERCICE II.17 (inégalités de Cauchy).
Soit f une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{z\,;\, r < |z| < R\}$, où $0 < r < R < +\infty$, telle que, $\forall z \in C_{r,R}$, $\operatorname{Re}(f(z)) \in [A,B]$. Montrer que, pour tout $\rho \in]r,R[$,

$$\sup_{|\zeta|=\rho} |f'(\zeta)| \leq \frac{e^{B-A}}{\min(\rho - r, R-\rho)}.$$

EXERCICE II.18 (principe du maximum).

1. Soit f une fonction continue dans un demi-plan fermé $\overline{\Pi}$, holomorphe dans le demi-plan ouvert Π. On suppose que $|f|$ est bornée par M sur la frontière de Π et que
$$\limsup_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Pi}} |f(z)| \leq M'.$$
Montrer que $|f|$ est bornée par $\sup(M, M')$ dans $\overline{\Pi}$.
2. En considérant la fonction $z \mapsto e^{\cos z}$, vérifier que le principe du maximum global dans $\overline{\Omega}$ peut fort bien être en défaut lorsque Ω est non borné.

EXERCICE II.19 (principe du maximum).
Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ présente un minimum en $z_0 \in \Omega$, que peut valoir ce minimum ?

EXERCICE II.20 (principe du maximum).
Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. On imagine le graphe de $(x,y) \mapsto |f(x+iy)|^2$ vu comme une « carte en relief » dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Quelle particularité (ou plutôt anomalie) présente cette carte en relief (si on la compare à une carte en relief classique d'un massif montagneux, telle une carte IGN) ?

EXERCICE II.21 (principe du maximum).
Soit P un polynôme de degré d et a un nombre strictement positif. Montrer que l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |P(z)| < a\}$ ne saurait avoir plus de d composantes connexes.

EXERCICE II.22 (principe de l'application ouverte).
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, φ une fonction de classe C^1 dans Ω, à valeurs réelles, telle que la courbe $S = \{\varphi = 0\}$ soit régulière (le gradient de φ ne s'annule pas sur cette courbe). Montrer que si f est une une fonction holomorphe dans U telle que $f(\Omega) \subset S$, alors nécessairement f est constante dans Ω.

EXERCICE II.23 (le théorème de Montel sans Ascoli).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ et $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} z^k$ le développement en série entière de f_n au voisinage de l'origine. On suppose que les fonctions $|f_n|$ sont uniformément bornées par une constante M_K sur tout compact K inclus dans leur domaine de définition.

1. En utilisant les inégalités de Cauchy et le processus diagonal, montrer que l'on peut extraire de la suite des entiers positifs une sous suite strictement croissante $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n_l,k})_k$ converge vers un certain nombre complexe a_k.
2. En utilisant toujours les inégalités de Cauchy dans la majoration
$$|f_{n_l}(z) - f_{n_l}(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_{n_l,k} - a_{n_{l'},k}|\,|z|^k + 2\sum_{k>N} \sup_n |a_{n,k}|\,,$$
montrer que, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$, la suite $(f_{n_l}(z))_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Conclure à l'existence d'une fonction g continue sur $\overline{D(0,1)}$ telle que $\lim_{l\to+\infty} f_{n_l}(z) = g(z)$. Pourquoi g est-elle holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$?
3. Déduire des questions précédentes une démonstration du théorème de Paul Montel[1] qui ne fasse pas appel au théorème d'Ascoli.

[1] Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, uniformément bornée en module sur tout compact de cet ouvert, alors on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(f_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ qui soit uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g holomorphe dans U.

EXERCICE II.24 (théorème de Montel).
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}$ une famille bornée de fonctions holomorphes dans U (il existe, pour chaque compact $K \subset\subset U$, une constante M_K telle que l'on ait pour tout $f \in \mathscr{F}$, pour tout $z \in K$, $|f(z)| \leq M_K$). Montrer que la famille $\mathscr{F}' := \{f' ; f \in \mathscr{F}\}$ est aussi une famille bornée. Si $\mathscr{F}'$ est une famille bornée, en est-il de même de $\mathscr{F}$?

EXERCICE II.25 (théorème de Montel).
La topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ peut-elle être définie par une norme ? ***Indication :*** *on pensera au théorème de F. Riesz caractérisant les espaces vectoriels normés de dimension finie en termes de relative compacité de la boule unité ouverte.*

EXERCICE II.26 (théorème de Montel).
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans lui-même. Pourquoi $\mathscr{F}$ est-elle une partie relativement compact de l'ensemble $\mathscr{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ? Quelle est l'adhérence de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{H}(\Omega)$? Vérifier que $\mathscr{F}$ est un semi-groupe pour la composition des applications et que, si $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ et $g = \lim_{n\to+\infty} g_n$ dans $\mathscr{F}$, alors $g \circ f = \lim_{n\to+\infty}(g_n \circ f_n)$ (toujours pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω).

EXERCICE II.27 (Suites de fonctions holomorphes).
Pour chacun des exemples suivants, montrer que l'on définit bien une fonction holomorphe dans l'ouvert indiqué entre parenthèses :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n!} \quad (\text{dans } \mathbb{C}) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z(z-n)} \quad (\text{dans } \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}^*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}z^2} \quad (\text{dans } |\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}\, z| < \pi/4) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\sin(nz) \quad (\text{dans } |\mathrm{Im}\, z| < 1).$$

EXERCICE II.28 (principe de réflexion de Schwarz).
Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > 0$, continue sur $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, réelle sur l'axe réel et telle que $|f(z)| = O(|z|^N)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini dans $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. Montrer que f est une fonction polynômiale.

EXERCICE II.29 (principe de réflexion de Schwarz).
Soit f une fonction holomorphe dans le demi-disque ouvert $D^+ := D(0,1) \cap \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, continue sur $D^+ \cup]-1,1[$, nulle sur $]-1,1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

EXERCICE II.30 (principe de réflexion de Schwarz).
Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, à valeurs dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, se prolongeant par continuité à un arc de cercle $]A,B[$ de la frontière de ce disque, avec $f(]A,B[) = I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe à l'union du disque ouvert $D(0,1)$ et du secteur angulaire ouvert d'ouverture $]A,B[$.

EXERCICE II.31 (principe de réflexion de Schwarz et théorème de l'application ouverte).
Soit f une fonction continue de $[0,1]^2$ dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$, holomorphe dans $]0,1[^2$. On suppose f bijective entre $[0,1]^2$ et $\overline{D(0,1)}$.

1. Montrer que, si Γ désigne le lacet correspondant au bord de $[0,1]^2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, un paramétrage de $f \circ \Gamma$ est $t \mapsto e^{2i\pi t}$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

EXERCICE II.32 (lemme de Schwarz).
Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même s'annulant à l'ordre $m \geq 1$ en $z = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|^m$ pour tout $z \in D(0,1)$ et que $|f^{(m)}(0)| \leq m!$. Que se passe-t-il lorsque l'une de ces inégalités devient une égalité ?

EXERCICE II.33 (le lemme de Schwarz comme il apparaît souvent en théorie des nombres).
Soit f une fonction entière, s'annulant à l'ordre au moins ν en tout point d'un sous-ensemble fini S inclus dans le disque unité fermé $\overline{D(0,r)}$. Montrer que, pour tout $R > r$, on a

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \log \sup_{|z|=R} |f(z)| - \nu\, \mathrm{card(S)}\, \log \frac{R-r}{2r}.$$

Indication : *on pensera à factoriser dans le disque unité ouvert la fonction*

$$z \mapsto \frac{f(Rz)}{\sup_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|}$$

EXERCICE II.34 (lemme de Schwarz).
Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0,1)$ dans lui-même. Montrer que si z et w sont deux points de ce disque, on a

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|.$$

Que peut-on dire s'il y a égalité pour deux points z et w distincts ?

Indication **:** *à partir de la fonction*

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(\zeta)},$$

on essaiera de construire une fonction holomorphe de $D(0,1)$ *dans lui-même s'annulant en* 0.

EXERCICE II.35 (lemme de Schwarz).
Soit f une application holomorphe de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$ s'annulant au points $z_1,\ldots,z_n$. Par récurrence sur n, montrer que $|f(0)| \leq |z_1 \ldots z_n|$.

EXERCICE II.36 (calcul de résidus).
Quels sont les pôles de la fonction

$$f_w \; : z \longmapsto \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{z^2(z-w)} \; ?$$

Calculer les résidus en ces pôles de la forme différentielle $f_w(z)\,dz$.

EXERCICE II.37 (théorème des résidus).
Soit $R = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, écrite ici sous forme réduite, telle que $\deg P \leq \deg Q - 2$, et n'ayant que des pôles simples. Montrer que

$$\sum_{Q(\alpha)=0} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = 0.$$

EXERCICE II.38 (théorème des résidus).
En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales semi-convergentes (les deux dernières sont dites *intégrales de Fresnel*) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \int_0^\infty \sin t^2\,dt, \; \int_0^\infty \cos t^2\,dt.$$

Indication **:** *dans le premier cas, utiliser comme contour le segment* $[-R,R]$ *(en prenant soin dans un premier temps d'éviter l'origine), concaténé avec le demi-cercle* $t \in [0,\pi] \mapsto Re^{2i\pi t}$ *; pour les deux autres intégrales, utiliser le bord du secteur conique* $\{re^{i\theta}\,;\, 0 \leq r \leq R;\, \theta \in [0,\pi/4]\}$.

EXERCICE II.39 (fonctions méromorphes et résidus (fonction Gamma)).
Pour tout $z \in \Pi^+ := \{\operatorname{Re} z > 0\}$, on pose

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Montrer que Γ est holomorphe dans le demi-plan Π^+ et vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dans ce demi-plan ouvert.
2. Montrer que Γ admet un prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction méromorphe dont les pôles sont $0,-1,-2,\ldots$. Calculer les résidus en tous ces pôles de la forme $\Gamma(z)\,dz$.

EXERCICE II.40 (fonctions méromorphes et résidus (fonction zéta de Riemann)).
Pour tout $z \in \Pi_1^+ := \{\operatorname{Re} z > 1\}$, on pose

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}.$$

1. Montrer que ζ est holomorphe dans le demi-plan Π_1^+.
2. Montrer que l'on a, pour tout $z \in \Pi_1^+$, la formule

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt.$$

3. Montrer que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$$

est bien définie dans $\mathbb{C}$ tout entier et est une fonction entière.

4. Montrer[2] qu'il existe des nombres B_k, $k \geq 0$, tels que la série entière $[B_k z^k]_{k\geq 0}$ soit de rayon de convergence 2π et que, pour tout $z \in \Pi_1^+$, on ait
$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{z+k-1}\,.$$
5. Déduire des questions précédentes que la fonction $\zeta\Gamma$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont on donnera la liste des pôles. Que valent les résidus en ces pôles de la forme $\zeta(z)\Gamma(z)\,dz$?

EXERCICE II.41 (décompte des zéros-pôles).
Calculer le nombre de zéros du polynôme
$$P(z) = z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3$$
dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$. Même question pour le polynôme
$$P(z) = z^7 - 5z^3 + 6.$$

EXERCICE II.42 (théorème et formules de Rouché).
Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que, pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, la fonction
$$f_w \,:\, z \longmapsto f(z,w)$$
soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$. On suppose aussi que f ne s'annule pas dans $\{|z| = 1\} \times \overline{D(0,1)}$.

1. Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$ et que ce nombre ne dépend pas de w. On l'appelle dans la suite p.
2. On suppose aussi que, tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto f(z,w)$ est holomorphe dans $D(0,1)$. Montrer qu'il existe des fonctions $a_1,\dots,a_p$ holomorphes dans $D(0,1)$, telles que dans $D(0,1) \times D(0,1)$,
$$f(z,w) = (z^p + a_1(w)z^{p-1} + \cdots + a_{p-1}z + a_p)g(z,w)\,,$$
où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z,w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés ?
Indication **:** *on utilisera les relations de Newton reliant les sommes de Newton $S_1,\dots,S_p$ de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1,\dots,\sigma_p$ de ces mêmes p nombres.*

EXERCICE II.43 (formules de Rouché).
Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque, et $\gamma \,:\, t \longmapsto 3e^{2i\pi t}$. On suppose
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = 2\,,\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = 2\,,\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = -4.$$
Que valent les zéros de f dans le disque $D(0,3)$?

EXERCICE II.44 (théorème de l'application ouverte).
Soit f une application holomorphe d'un ouvert connexe U dans lui-même, telle que $f \circ f = f$. Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité.

EXERCICE II.45 (théorème de l'application ouverte).
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe non constante de U dans U telle que $f(U)$ soit un sous-ensemble relativement compact de U. On définit la suite $f^{(n)}$ en posant $f^{[n]} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

1. Montrer que tous les ensembles $f^{[n]}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, sont ouverts et que leur intersection K est compacte.
2. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f^{[n]})_n$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g et que $g(U) \subset K$.
3. Montrer qu'en fait $g(U) = K$. En conclure que la suite $(f^{[n]})_n$ converge uniformément sur tout compact vers un point d'attraction $z_0 \in U$.

EXERCICE II.46 (principe de Phragmen-Lindelöf).
Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq Ce^{B|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, C et B étant deux constantes positives. On suppose aussi qu'il existe un entier N tel que $F(t) = O(1+|t|)^N$ lorsque t tend vers $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante positive C' telle que
$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ |F(z)| \leq C'(1+|z|)^N e^{B|\mathrm{Im}\, z|}.$$

[2] Voir aussi l'Exercice II.6

EXERCICE II.47 (principe de Phragmen-Lindelöf dans une bande).
Soit f une fonction holomorphe bornée dans la bande ouverte $B := \{z\,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue à $\overline{B}$. Soit $A_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(iy)|$ et $A_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(1+iy)|$. On suppose $A_0A_1 > 0$.

1. Montrer que la fonction $G\ : z \in B \mapsto f(z)A_0^{z-1}A_1^{-z}$ est holomorphe dans B, se prolonge en une fonction continue dans $\overline{B}$, de prolongement borné en module par 1 sur la frontière de $\overline{B}$.
2. En utilisant le principe du maximum avec $z \mapsto G(z)e^{\varepsilon z^2}$, où $\varepsilon > 0$, puis en faisant tendre ε vers 0, montrer
$$\forall z \in B\,,\ |f(z)| \le A_0^{1-\mathrm{Re}\, z} A_1^{\mathrm{Re}\, z}.$$
3. Que se passe-t'il si $A_0A_1 = 0$?

EXERCICE II.48 (principe de Phragmen-Lindelöf dans un secteur).
Soit $\alpha \in]0,\pi[$ et C_α le secteur angulaire ouvert
$$C_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^*\,;\, |\arg_{]-\pi,\pi[}(z)| < \alpha\}.$$

1. Pour $\gamma \in]0,\infty[$, on définit la fonction $z \mapsto z^\gamma$ dans C_α par
$$z^\gamma := \exp(\gamma(\log|z| + i\arg_{]\pi,\pi[}(z))).$$
Montrer que cette fonction est holomorphe dans C_α et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{C_\alpha}$.
2. Soit f une fonction $\overline{C_\alpha} \to \mathbb{C}$, continue sur $\overline{C_\alpha}$, holomorphe sur C_α et telle que $\sup_{\partial C_\alpha} |f| = M < \infty$. On suppose aussi qu'il existe trois constantes $A > 0$, $B > 0$, $\rho \in]0,\pi/(2\alpha)[$ telles que
$$\forall z \in \overline{C_\alpha},\ |f(z)| \le Ae^{B|z|^\rho}.$$
Soit $\gamma \in]\rho,\pi/(2\alpha)[$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in\overline{C_\alpha}}} |f(z)e^{-\varepsilon z^\gamma}| = 0.$$
3. Montrer en utilisant convenablement le principe du maximum que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\forall z \in \overline{C_\alpha},\ |f(z)e^{-\varepsilon z^\gamma}| \le M.$$
En déduire que $|f|$ est bornée par $M = \sup_{\partial C_\alpha} |f|$ dans $\overline{C_\alpha}$.

CHAPITRE III

FONCTIONS HARMONIQUES

Dans ce chapitre nous définissons les fonctions harmoniques (et sous-harmoniques) en général dans $\mathbb{R}^n$ puis nous étudierons les relations existant, dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, avec les fonctions holomorphes. Dans le cas général de $\mathbb{R}^n$ notre but principal est de montrer que ces fonctions sont caractérisées par le propriété de la moyenne (et de la sous-moyenne) et de résoudre le problème de Dirichlet classique dans une boule.

Dans tout ce chapitre, $\triangle$ désigne l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$, $\triangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, et ∇ désigne le vecteur gradient $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ de sorte que, si u est de classe $\mathscr{C}^1$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. Enfin, on rappelle que si $w = (w_1, \dots, w_n) \in \left(\mathscr{C}^1\right)^n$, on appelle divergence de w la fonction $\mathrm{div} w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$. Les formules de Green données au paragraphe suivant font appel à la notion de mesure euclidienne sur une hypersurface régulière de $\mathbb{R}^n$. Nous ne nous en servirons, essentiellement, que pour des sphères. Le lecteur non familier avec cette notion pourra consulter l'Annexe A.

III.1 La formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$. Dans ce qui suit, on notera généralement ν le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$. Plus précisément, si $\rho \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ est une fonction définissante de Ω (i.e. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\rho(x) < 0\}$ et $\nabla\rho$ ne s'annule pas sur $\partial\Omega$) alors $\nu = \frac{1}{|\nabla\rho|}\nabla\rho = \frac{1}{|\nabla\rho|}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\rho}{\partial x_n}\right)$. Si u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $\partial\Omega$ on notera $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ la dérivée normale de u en un point de $\partial\Omega$ (i.e. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu\rangle = \frac{1}{|\nabla\rho|}\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$).

PROPOSITION III.1.1 (Formules de Green).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ dans $\overline{\Omega}$. Alors :

1. ***Première formule de Green** :*
$$\int_\Omega \triangle u \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma, \tag{III.1}$$
où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $d\sigma$ le mesure euclidienne sur $\partial\Omega$;
2. ***Seconde formule de Green** :*
$$\int_\Omega (v\triangle u - u\triangle v)\, d\lambda = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma. \tag{III.2}$$

Nous allons simplement donner une esquisse de la démonstration de ces deux formules classiques en géométrie différentielle.

Esquisse de la démonstration. Soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \left(\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n$. Les formules de Green sont basés sur la *formule de la divergence* :

$$\int_\Omega \operatorname{div} w \, d\lambda = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \frac{d\sigma}{|\nabla \rho|}. \tag{III.3}$$

Cette formule, classique elle aussi, résulte de la formule de Stokes (dans $\mathbb{R}^n$) appliquée à la formule suivante :

Lemme. *Soit* $\omega_i = (-1)^i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$. *Alors*

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \frac{d\sigma}{|\nabla \rho|} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n w_i \omega_i.$$

Ce Lemme se démontre en vérifiant que, sur $\partial\Omega$ la forme différentielle ω_i s'écrit $\omega_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{d\sigma}{|\nabla \rho|}$, ce que l'on vérifie localement à l'aide d'une paramétrisation de la variété $\partial\Omega$ (part exemple, cette écriture est évidente lorsque $\rho(x) = x_1$, et le cas général s'obtient avec un changement de paramètres dont l'existence résulte du Théorème des fonctions implicites).

La première formule de Green est alors la formule de la divergence appliquée à $w = \nabla u$ et la seconde à $w = v\nabla u - u\nabla v$. □

III.2 *Fonctions harmoniques et sous-harmoniques et propriété de la moyenne*

DÉFINITION III.2.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Une fonction u sur Ω est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et si son laplacien est identiquement nul (i.e. $\triangle u \equiv 0$)
2. Une fonction *réelle* de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω dite **sous-harmonique** (resp. **super-harmonique** ou **sur-harmonique**) si son laplacien est (partout) positif (resp. négatif) ou nul (i.e. $\triangle u \geq 0$ (resp. $\triangle u \leq 0$).

Nous donnerons plus loin une définition plus générale (i.e. sans l'hypothèse $\mathscr{C}^2$) des fonctions sous-harmoniques et sur-harmoniques.

THÉORÈME III.2.1 (Formules de la moyenne).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathscr{C}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ (i.e. une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω à valeurs réelles).

1. *On suppose u harmonique (resp. sous-harmonique, resp. sur-harmonique). Alors, en désignant par ω_n le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, si $B(y,R)$ est une boule (euclidienne) d'adhérence contenue dans Ω, on a :*

   (a) *$u(y) =$ (resp. $\leq$, resp. $\geq$)$\dfrac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B(y,R)} u \, d\sigma$ (**formule de la moyenne (resp. sous-moyenne, resp. sur-moyenne) sphérique**),*

   (b) *$u(y) =$ (resp. $\leq$, resp. $\geq$)$\dfrac{1}{\omega_n R^n} \displaystyle\int_{B(y,R)} u \, d\lambda$ (**formule de la moyenne (resp. sous-moyenne, resp. sur-moyenne) volumique**).*

2. *Réciproquement, si, pour toute boule $B(y,R)$ d'adhérence contenue dans Ω, la relation du (a) ci-dessus est satisfaite u est harmonique (resp. sous-harmonique, resp. sur-harmonique).*

Nous verrons plus tard que, dans le 2. on peut remplacer la condition de 1. (a) par celle (à priori plus faible) du 1. (b).

Démonstration. Démontrons tout d'abord le 1. Pour simplifier les notations supposons $y=0$ et notons $B_\rho = B(0,\rho)$, $0\leq\rho$, la boule ouverte de centre l'origine et de rayon ρ. La première formule de Green ((III.1)) appliquée à u donne

$$\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma = 0 (\text{resp. } \geq 0, \text{resp. } \leq 0).$$

Comme $B_\rho = \left\{x\in\mathbb{R}^n \text{ tels que } \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}<\rho\right\}$, sur ∂B_ρ, on a $\frac{\partial u}{\partial\nu} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\rho}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma &= \frac{\rho^{n-1}}{\rho}\int_{\partial B_1}\left(\sum_{i=1}^n \rho z_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(\rho z)\right)d\sigma(z)\\
&= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_{\partial B_1}u(\rho z)\,d\sigma(z)\right)\\
&= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x)\right)\\
&= (\text{resp. } \geq, \text{resp. } \leq)\quad 0.
\end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction $\rho\mapsto\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x)$ est constante (resp. croissante, resp. décroissante). Comme

$$\lim_{\rho\to0}\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,d\sigma(x) = n\omega_n u(0),$$

le 1. (a) est démontré. Le 1. (b) s'en déduit immédiatement, puisque, par intégration en polaires, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R}u\,d\lambda &= \frac{1}{\omega_n R^n}\int_0^R\left(\int_{\partial B_\rho}u\,d\sigma\right)d\rho\\
&= \frac{1}{R^n}\int_0^R\rho^{n-1}\left(\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u\,d\sigma\right)d\rho\\
&= (\text{resp. } \geq, \text{resp. } \leq)\quad \frac{n}{R^n}u(0)\int_0^R\rho^{n-1}d\rho = u(0).
\end{aligned}$$

Démontrons maintenant le 2. Pour simplifier les notations, en supposant $0\in\Omega$, montrons que $\triangle u(0) = (\text{resp. } \geq, \text{resp. } \leq)0$. Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme. *Soit $B(0,R)$ une boule ouverte contenue dans Ω. Alors, pour $0<\rho<R$ on a*

$$\int_{B_\rho}v_\rho\triangle u\,d\lambda = u(0) - \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u\,d\sigma,$$

où v_ρ est la fonction définie par

$$v_\rho = \frac{1}{c_n}\begin{cases}\dfrac{-1}{|x|^{n-2}}+\dfrac{1}{\rho^{n-2}} & si\, n\geq3,\\ \log\dfrac{|x|}{\rho} & si\, n=2,\end{cases}$$

où $c_n = \begin{cases} n(n-2)\omega_n & si\, n\geq3\\ 2\omega_2 & si\, n=2\end{cases}$.

Démonstration du Lemme. Un calcul direct montre que, si $x\neq0$, $\triangle v_\rho(x)=0$. Alors, la seconde formule de Green ((III.2)) donne, pour $0<\varepsilon<\rho$,

$$\int_{B_\rho\setminus B_\varepsilon}v_\rho\triangle u\,d\lambda = -\int_{\partial B_\rho}u\frac{\partial v_\rho}{\partial\nu}d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon}\left(v_\rho\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v_\rho}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

En remarquant que $d\sigma(\partial B_\varepsilon) = \mathrm{O}(\varepsilon^{n-1})$, et que $v_\rho = \frac{-1}{\varepsilon^{n-2}}+\frac{1}{\rho^{n-2}}$ sur ∂B_ε, et, en utilisant que u est de classe $\mathscr{C}^2$ il vient $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_\varepsilon}v_\rho\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma = 0$. Par ailleurs, la normale extérieure à $B_\rho\setminus B_\varepsilon$ sur ∂B_ε (resp. ∂B_ρ), étant $\left(-\frac{x_i}{\varepsilon}\right)_i$ (resp. $\left(\frac{x_i}{\rho}\right)$), on a, sur ∂B_ε, (resp. ∂B_ρ),

$$c_n\frac{\partial v_\rho}{\partial\nu} = \begin{cases} -(n-2)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\ (\text{resp. } (n-2)\frac{1}{\rho^{n-1}}) & \text{si } n\geq3,\\ -\frac{1}{\varepsilon}\ (\text{resp. } \frac{1}{\rho}) & \text{si } n=2,\end{cases}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_\varepsilon}u\frac{\partial v_\rho}{\partial\nu}d\sigma &= \begin{cases}\lim_{\varepsilon\to0}-\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\frac{1}{c_n}\int_{\partial B_\varepsilon}u\,d\sigma & \text{si } n\geq3,\\ \lim_{\varepsilon\to0}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{c_2}\int_{\partial B_\varepsilon}u\,d\sigma & \text{si } n=2\end{cases}\\
&= u(0),
\end{aligned}$$

et le Lemme en découle. □

Fin de la preuve du Théorème. Supposons que l'on soit dans le cas $\le$ de l'hypothèse 1. (a) (le cas $\ge$ étant similaire et le cas $=$ se déduisant des deux précédents). Le Lemme donne donc, pour $0 < \rho < R$,

$$\int_{B_\rho} v_\rho \triangle u \, d\lambda \le 0.$$

Comme u est supposée de classe $\mathscr{C}^2$, on a $\triangle u(x) = \triangle u(0) + \mathrm{O}(|x|)$ donc

$$\triangle u(0) \int_{B_\rho} v_\rho \, d\lambda + \int_{B_\rho} v_\rho(x) \mathrm{O}(|x|) \, d\lambda(x) \le 0. \tag{III.4}$$

Un calcul direct montre que

$$\int_{B_\rho} v_\rho \, d\lambda = \begin{cases} -\rho^2 n\omega_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) & \text{si } n \ge 3, \\ -\rho^2 A & A > 0 \text{ si } n = 2, \end{cases}$$

et $\left|\int_{B_\rho} v_\rho(x)\mathrm{O}(|x|)\, d\lambda(x)\right| \le C\rho^3$. Alors en divisant (III.4) par ρ^2 et en faisant tendre ρ vers 0, il vient $\triangle u(0) \ge 0$, ce qui termine la preuve. □

Remarque. Dans le cas des fonctions harmoniques (i.e. cas $=$ de l'énoncé) le Théorème est clairement vrai pour des fonctions à valeurs complexes.

PROPOSITION III.2.1 (Principe du maximum).

*Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction continue **réelle** sur Ω telle que, pour toute boule $B(x,R)$ contenue dans Ω on a*

$$u(x) \le \text{(resp. } \ge \text{)} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x,R)} u \, d\lambda.$$

*Pour $y \in \Omega$, s'il existe un voisinage V de y tel que $u(y) = \sup_V u$ (resp. $\inf_V u$), alors u est constante au voisinage de y (**principe du maximum** (resp. **minimum**) **local**).*

*En particulier, si u est continue sur $\overline{\Omega}$ et non constante et si Ω est connexe et borné, $\forall x \in \Omega$ on a $u(x) < \sup_{\partial\Omega} u$ (resp. $> \inf_{\partial\Omega} u$) (**principe du maximum** (resp. **minimum**) **global**).*

Démonstration. Nous faisons la démonstration dans le cas $\le$.

Soit $B(y,r)$ une boule contenue dans V et soit $M = \sup_{B(y,r)} u$. Comme u est supposée continue, l'ensemble

$$\omega = \{x \in B(y,r) \text{ tels que } u(x) = M\}$$

est fermé dans $B(y,r)$ et contient y par hypothèse. Pour tout $z \in \omega$ tel que $B(z,\rho) \subset B(y,r)$, l'hypothèse dit

$$0 = u(z) - M \le \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B(z,\rho)} (u - M) \, d\lambda.$$

Comme $u \le M$ sur $B(z,\rho)$ et u est continue, si en un point w de $B(z,\rho)$ on a $u(w) < M$ alors $\int_{B(z,\rho)} (u-M)\, d\lambda < 0$ ce qui est impossible et prouve donc que $B(z,\rho) \subset \omega$ donc ω est ouvert et ainsi $\omega = B(y,r)$.

Montrons maintenant la seconde partie. S'il existe $x \in \Omega$ tel que $u(x) \ge \sup_{\partial\Omega} u$, en posant $M = \sup_{\overline{\Omega}} u$, alors il existe $z \in \Omega$ tel que $u(z) = M$ ($\overline{\Omega}$ est supposé compact) et l'ensemble $F = \{x \in \Omega \text{ tels que } u(x) = M\}$ est un fermé non vide de Ω, et comme la première partie montre que cet ensemble est aussi ouvert il est égal à Ω. □

COROLLAIRE 1.

*Soit u une fonction à valeurs **complexe** dans un ouvert Ω qui vérifie la propriété de la moyenne*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x,R)} u \, d\lambda$$

sur toute boule $B(x,r)$ contenue dans Ω.

*Alors u est continue, et, pour $y \in \Omega$, s'il existe un voisinage V de y tel que $|u|(y) = \sup_V |u|$ (resp. $\inf_V u$), alors u est constante au voisinage de y (**principe du maximum local**).*

Démonstration. Il est clair que u est continue. Quitte à multiplier u par une constante on peut supposer $u(y) = 1$. La Proposition montre que $|u|$ est constante sur un voisinage V de y, donc $u(x) = e^{i\upsilon(x)}$ sur V. Si $x \in V$ est tel que $u(x) = 1$ et si $B(x,R)$ est une boule contenue dans V, on a donc $1 = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x,R)} \cos(\upsilon(z))\, dz$, ce qui entraîne $\upsilon(z) = 0$ dans $B(x,R)$. Ainsi, l'ensemble des points x d'une boule $B(y,r)$ contenue dans V vérifiant $u(x) = u(y)$ est ouvert et est donc égal à $B(y,r)$. □

Le Théorème III.2.1 et la Proposition donnent aussitôt :

COROLLAIRE 2.

Soit Ω un ouvert connexe borné dans $\mathbb{R}^n$. Soient u et v deux fonction réelles de classe $\mathscr{C}^2$ dans Ω continues sur $\bar{\Omega}$.

1. *On suppose $\triangle u = \triangle v$ dans Ω . Alors « $u = v$ sur $\partial\Omega$ » implique « $u = v$ dans Ω ».*
2. *On suppose $\triangle u = 0$ et $\triangle v \geq 0$ dans Ω. Alors « $u = v$ sur $\partial\Omega$ » implique « $v \leq u$ dans Ω ».*
3. *On suppose $\triangle u = 0$ et $\triangle v \leq 0$ dans Ω. Alors « $u = v$ sur $\partial\Omega$ » implique « $v \geq u$ dans Ω ».*

Ce Corollaire amène naturellement la Définition qui suit :

DÉFINITION III.2.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ (resp. $u : \Omega \to]-\infty, +\infty]$) est dite **sous-harmonique** (resp. **sur-harmonique**) si :

1. u est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) ;
2. pour toute boule $B = B(x,r)$ d'adhérence contenue dans Ω et pour toute fonction $v \in \mathscr{C}(\bar{B}, \mathbb{R})$ harmonique dans B telle que $u \leq v$ (resp. $u \geq v$) sur ∂B on a $u \leq v$ (resp.$u \geq v$) dans B.

PROPOSITION III.2.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ (resp. $u : \Omega \to]-\infty, +\infty]$ une fonction semi-continue supérieurement (resp. inférieurement). Si l'une des deux conditions suivante est satisfaite :

1. *Il existe $R > 0$ tel que, pour toute boule $B = B(x,r)$, $r \leq R$, d'adhérence contenue dans Ω on a*
$$u(x) \leq (\text{ resp. } \geq) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(x)\, d\sigma(x),$$
2. *Il existe $R > 0$ tel que, pour toute boule $B = B(x,r)$, $r \leq R$, d'adhérence contenue dans Ω on a*
$$u(x) \leq (\text{ resp. } \geq) \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B} u(x)\, d\sigma(x),$$

alors u est sous-harmonique (resp. sur-harmonique) dans Ω.

Démonstration. Comme la condition 1. implique la condition 2. (voir la preuve du Théorème III.2.1), il suffit de faire la démonstration sous la condition 2. Soit $B = B(x,r)$ une boule ouverte d'adhérence contenue dans Ω. Soit h une fonction réelle, continue sur $\overline{B}$, harmonique dans B telle que $u \leq h$ sur ∂B. Si la relation « $u \leq h$ sur B » est fausse, par semi-continuité, on a $M = \sup_{\overline{B}}(u-h) > 0$ et l'ensemble $F = \{x \in B \text{ tels que } u - h = M\}$ est un compact non vide de B. Soit z_0 un point de F tel que $\operatorname{dist}(z_0, \partial B) = \operatorname{dist}(F, \partial B) > 0$. Si $B_0 = B(z_0, \rho)$ est une boule ouverte d'adhérence contenue dans B et de rayon $\rho \leq R$, $u - h$ est $< M$ sur un ouvert non vide de B_0 ce qui implique que la moyenne de $u - h$ sur cette boule est $< M$, et, la formule de la moyenne pour h (Théorème III.2.1) et l'hypothèse donnent $(u-h)(z_0) < M$ ce qui contredit la définition de z_0. □

III.3 Le problème de Dirichlet classique dans une boule

Le principal but de ce paragraphe est de montrer qu'une fonction continue qui vérifie la propriété de la moyenne est harmonique. Pour cela nous avons besoin de résoudre le problème de Dirichlet classique dans une boule. Pour cela nous introduisons un certain nombre de noyaux classiques.

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, $x \neq y$, on pose

$$\Gamma(y-x) = \gamma(|y-x|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} \dfrac{1}{|y-x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|y-x| & \text{si } n = 2. \end{cases} \tag{III.5}$$

Un calcul direct montre que :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Gamma(y-x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^n},$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Gamma(y-x) = \frac{1}{n\omega_n}\left[\frac{\delta_{ij}}{|y-x|^n} - \frac{n\,(y_i-x_i)\,(y_j-x_j)}{|y-x|^{n+2}}\right].$$

On en déduit que, pour $x \neq y$, $\triangle_y \Gamma(y-x) = 0$ ($\triangle_y$ désignant le laplacien par rapport à la variable y) de sorte que $y \mapsto \Gamma(y-x)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$.

PROPOSITION III.3.1.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord régulier. Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$. Alors, pour tout $x \in \Omega$ on a

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\right]d\sigma(y) + \int_{\Omega}\Gamma(y-x)\triangle u(y)\,d\lambda(y),$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$ désigne la dérivation par rapport à la variable y dans la direction de la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point y.

En particulier, si u est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, on a

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(y-x)\triangle u(y)\,d\lambda(y).$$

Démonstration. La seconde formule de Green (Proposition III.1.1) sur $\Omega \setminus B_\rho$, $B_\rho = B(x,\rho)$, $\rho > 0$, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_\rho}\Gamma(y-x)\triangle u(y)\,d\lambda(y) \quad &= \quad \int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y-x)\right]d\sigma(y)\\ &\quad + \int_{\partial B_\rho}\left[\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y-x)\right]d\sigma(y).\end{aligned}$$

Sur ∂B_ρ on a $\Gamma(y-x) = \gamma(\rho)$ d'où

$$\left|\int_{\partial B_\rho}\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma(y)\right| \leq n\omega_n\rho^{n-1}\gamma(\rho)\sup_{\partial B_\rho}|\nabla u| \xrightarrow{\rho\to 0} 0.$$

Par ailleurs, sur ∂B_ρ, $\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y-x) = \gamma'(\rho)$ donc

$$\int_{\partial B_\rho}u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(y-x)\,d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u(y)\,d\sigma(y) \xrightarrow{\rho\to 0} u(x),$$

ce qui montre la formule. □

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, si, $\forall x \in \Omega$, il existe une fonction $h_x \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathscr{C}^2(\Omega)$ harmonique telle que, sur $\partial\Omega$, $h_x(y) = -\Gamma(y-x)$, en posant

$$G_\Omega(x,y) = \Gamma(y-x) + h_x(y),$$

pour $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$, la Proposition précédente et la seconde formule de Green appliquée aux fonctions h_x et u donnent

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}u(y)\frac{\partial G_\Omega}{\partial \nu_y}(x,y)\,d\sigma(y) + \int_{\Omega}G_\Omega(x,y)\triangle u(y)\,d\lambda(y). \tag{III.6}$$

On peut démontrer qu'une telle fonction G_Ω, si elle existe, est unique : pour tout y la fonction $y \mapsto G_\Omega(x,y)$ est harmonique sur $\Omega \setminus \{x\}$ et est nulle sur $\partial\Omega$; elle est donc caractérisée par son comportement au voisinage de y qui est donné par celui de Γ. On l'appelle la **fonction de Green** de Ω et sa dérivée normale $\frac{\partial G_\Omega}{\partial \nu_y}$ est appelée le **noyau de Poisson** de Ω.

En théorie du potentiel on montre, par exemple, que tout ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière de classe $\mathscr{C}^1$ possède une fonction de Green. Nous n'allons pas rentrer dans ce sujet, nous nous contentons ici de donner explicitement la fonction de Green et le noyau de Poisson d'une boule euclidienne.

Pour simplifier les notations, explicitons ces fonction pour une boule $B_R = B(0,R)$ centrée en 0. Pour $x \in B_R \setminus \{0\}$, on pose $\overline{x} = x\frac{R^2}{|x|^2}$.

Alors un calcul fastidieux que nous ne détaillerons pas ici montre que la fonction de Green $G(x,y) = G_{B_R}(x,y)$ de B_R est donnée par la formule

$$G(x,y) \quad = \quad \begin{cases}\gamma(|y-x|) - \gamma\left(\frac{|x|}{R}\,|y-\overline{x}|\right) & \text{si } x \neq 0\\ \gamma(|y|) - \gamma(R) & \text{si } x = 0\end{cases} \tag{III.7}$$

$$= \quad \gamma\left(|y|^2 + |x|^2 - 2\,\langle y,x\rangle^{1/2}\right) - \gamma\left(\left[\frac{|y|^2\,|x|^2}{R^2} + R^2 - 2\,\langle y,x\rangle\right]^{1/2}\right) \text{ si } x \neq y. \tag{III.8}$$

Pour vérifier cette formule, on vérifie que $\triangle_y G(x,y) = 0$ si $x \neq y$, que $G(x,y)$ est nulle sur $B_R \times \partial B_R$ et que, au voisinage de x, $G(x,y)$ diffère de $\Gamma(y-x)$ d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$.

On remarquera de plus que $G(x,y) = G(y,x)$, donc $G(x,y)$ est harmonique par rapport à chaque variable pour $x \neq y$, et que $G(x,y) \leq 0$. Un calcul direct de dérivée partielle donne alors le noyau de Poisson $P(x,y) = P_{B_R}(x,y)$ de B_R :

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \frac{1}{|y-x|^n},$$

et, en particulier, on remarque que $P(x,y) \geq 0$. De plus, comme $P(x,y)$ est la dérivée normale (dans la variable y) de $G(x,y)$, pour $y \in \partial B_R$, $x \mapsto P(x,y)$ est harmonique dans B_R.

La formule (III.6) appliquée à une fonction u harmonique dans B_R continue dans son adhérence donne ce que l'on appelle la **formule intégrale de Poisson** : $\forall x \in B_R = B(0,R)$,

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y) = \int_{\partial B_R} P_{B_R}(x,y) u(y)\, d\sigma(y). \tag{III.9}$$

D'une manière générale si φ est une fonction intégrable sur ∂B_R, la fonction $x \mapsto \int_{\partial B_R} P_{B_R}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma(y)$, définie dans B_R, s'appelle l'**intégrale de Poisson de** φ sur ∂B_R.

On remarquera que cette formule montre que toute fonction harmonique dans B_R est automatiquement $\mathscr{C}^\infty$ (et même analytique réelle). Par translation on en déduit que toute fonction harmonique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ (et même analytique réelle). De plus, les propriétés du noyau de Poisson données ci-dessus montrent que, si φ est une fonction intégrable sur ∂B_R alors la fonction $x \mapsto \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y)$ est harmonique dans B_R :

PROPOSITION III.3.2.

Toute fonction harmonique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est analytique réelle, donc, en particulier, $\mathscr{C}^\infty$. De plus l'intégrale de Poisson d'une fonction intégrable sur le bord d'une boule est une fonction harmonique dans cette boule.

THÉORÈME III.3.1 (Problème de Dirichlet classique dans $B(0,R)$).

Soit $B = B_R = B(0,R)$. Soit $\varphi \in L^\infty(\partial B)$. Alors la fonction u définie dans $\overline{B(0,R)}$ par

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B} P_B(x,y)\varphi(y)\, d\sigma(y) = \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y), & x \in B(0,R), \\ \varphi(x), & x \in \partial B(0,R), \end{cases}$$

est harmonique dans $B(0,R)$ est, si φ est continue en un point $x_0 \in \partial B(0,R)$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B(0,R)}} u(x) = \varphi(x_0)$. En particulier, si φ est continue sur $\partial B(0,R)$ alors u est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

Remarque. Par translation, ce Théorème montre que, pour toute boule $B = B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^n$, si φ est une fonction continue sur ∂B, il existe une (unique d'après la Proposition II.2.8) fonction $u \in \mathscr{C}\left(\overline{B}\right) \cap \mathscr{C}^\infty(B)$ harmonique dans B égale à φ sur ∂B.

Démonstration. Nous avons déjà remarqué que u est harmonique dans B. La formule (III.9) appliquée à la fonction identiquement égale à 1 donne

$$\int_{\partial B} P_B(x,y)\, d\sigma(y) = 1,$$

donc, puisque P_B est positif,

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_{\partial B} P_B(x,y)\, |\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, d\sigma(y).$$

Comme φ est continue en x_0, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ implique $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$; par suite, pour $|x - x_0| \leq \eta/2$, on a

$$\begin{aligned} |u(x) - \varphi(x_0)| &\leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty \int_{\partial B \cap \{|y-x_0| > \eta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\sigma(y) \\ &\leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_\infty \left(R^2 - |x|^2\right) \left(\frac{2}{\eta}\right)^n R^{n-2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u(x) \to \varphi(x_0)$ quand $x \to x_0$. □

On notera que cette démonstration signifie que la noyau de Poisson $P_B(x,y)$ est une unité approchée (c.f. Proposition III.4.2).

Le Corollaire qui suit dit que les Définitions III.2.1 et III.2.2 coïncident sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$:

COROLLAIRE.

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si u est sous-harmonique (resp. sur-harmonique) au sens de la Définition III.2.2, alors $\triangle u \geq 0$ (resp. ≤ 0) dans Ω.

Démonstration. Supposons u sous-harmonique au sens de la Définition III.2.2. Pour simplifier les notations, nous supposons $0 \in \Omega$ et montrons que $\triangle u(0) \geq 0$. Soit $B = B(0,r)$ une boule d'adhérence contenue dans Ω. Soit h_r la fonction harmonique dans B égale à u sur ∂B, de sorte que, par hypothèse, $u(0) - h_r(0) \leq 0$. Écrivons la formule de Green (III.6) de cette boule pour la fonction $u - h_r$: d'après (III.7),

$$0 \geq u(0) - h_r(0) = \int_B (\gamma(|x|) - \gamma(r)) \triangle u(x)\, d\lambda(x).$$

En écrivant que, pour $r \leq r_\varepsilon$, on a $\triangle u(x) = \triangle u(0) + \mathrm{O}(\varepsilon)$ et en utilisant la formule (III.5), un calcul explicite, identique à celui fait à la fin de la preuve du Théorème III.2.1, de cette inégalité donne aisément $\triangle u(0) \geq \mathrm{O}(\varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0. □

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette Section :

THÉORÈME III.3.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue (resp. $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement, resp. $u : \Omega \to]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement). Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *u est harmonique (resp. sous-harmonique, resp. sur-harmonique) :*
2. *il existe $R > 0$ tel que, pour toute boule $B = B(x,r)$, $r \leq R$, d'adhérence contenue dans Ω, on a*

$$u(x) = (\text{resp. } \leq, \text{ resp. } \geq) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} yu\, d\sigma;$$

3. *il existe $R > 0$ tel que, pour toute boule $B = B(x,r)$, $r \leq R$, d'adhérence contenue dans Ω, on*

$$u(x) = (\text{resp. } \leq, \text{ resp. } \geq) \frac{1}{\omega_n r^n} \int_B u\, d\sigma.$$

Démonstration. Compte tenu de ce qui précède, il nous reste deux implications à démontrer : d'une part que la condition 3. avec « $=$ » implique 1. avec « harmonique » et, d'autre part, que la condition 1. avec « sous-harmonique » (resp. « sur-harmonique ») implique la condition 2. avec « $\leq$ » (resp. « $\geq$ »).

Vérifions tout d'abord le premier point. D'après le Théorème III.3.1 il existe une fonction h harmonique dans B, continue dans $\overline{B}$ telle que $h_{|\partial B} = u_{|\partial B}$. D'après le Théorème III.2.1 $u - h$ vérifie la propriété de la moyenne (« volumique ») donc le principe du maximum global (Proposition III.2.1) ce qui implique $u = h$ dans B, donc u est harmonique.

Vérifions maintenant le second dans le cas « sous-harmonique » l'autre cas se traitant de manière similaire. Soit $B = B(x,R)$ une boule d'adhérence contenue dans Ω. Soit φ une fonction continue sur ∂B et soit h_φ la fonction harmonique dans B égale à φ sur ∂B donnée par le Théorème III.3.1. Si $u \leq \varphi$ sur ∂B, par hypothèse (c.f. Définition III.2.2) on a $u \leq h_\varphi$ sur B et, la propriété de la moyenne pour h_φ (Théorème III.2.1) implique

$$u(x) \leq \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} \varphi\, d\sigma.$$

Pour conclure que 2. avec « $\leq$ » est satisfaite il suffit alors de remarquer que, u étant semi-continue supérieurement, on a

$$\int_{\partial B} u\, d\sigma = \inf_{\substack{\varphi \geq u \\ \varphi \in \mathscr{C}^0(\partial B)}} \int_{\partial B} \varphi\, d\sigma.$$

□

Remarque. En considérant les parties réelles et imaginaires, on déduit du Théorème ci-dessus que si $u : \Omega \to \mathbb{C}$ alors u est harmonique si et seulement elle vérifie la propriété de la moyenne, soit volumique soit sphérique (c.f. Théorème III.2.1), sur toute boule d'adhérence contenue dans Ω.

COROLLAIRE.

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques (complexes) qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction u. Alors u est harmonique.

Démonstration. En effet, u est continue comme limite uniforme de fonctions continues, et elle vérifie les formules de la moyenne. □

PROPOSITION III.3.3 (Principe du maximum global).

Soit u une fonction harmonique réelle (resp. complexe) sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$. Si u (resp. $|u|$) a un maximum local ou un minimum local (resp. un maximum local) en un point de Ω alors u est constante.

Démonstration. Supposons que u est réelle et qu'elle a un maximum local en $y \in \Omega$ ou que u est complexe et que $|u|$ a un maximum local en $y \in \Omega$ (le cas u réelle et « minimum local » se traite en remplaçant u par $-u$). Si u est réelle, nous savons alors que u est constante au voisinage de y par la Proposition III.2.1 ; si u est complexe la même conclusion est vraie grâce au Corollaire 1 de la Proposition III.2.1. Ainsi l'ensemble $F = \{x \in \Omega \text{ tels que } u(z) = u(y) \text{ pour } z \text{ dans un voisinage de } x\}$ est un ouvert non vide. Si x est un point de Ω qui est dans l'adhérence de F alors, par continuité, toutes les dérivées $D^\alpha u(x)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \neq 0$, sont nulles ce qui signifie que la série de Taylor de u en x est réduite à $u(x)$, et l'analyticité de u (Proposition III.3.2) implique alors que u est constante au voisinage de x. Ainsi F est aussi fermé donc égal à Ω. □

PROPOSITION III.3.4.

Soit u une fonction harmonique de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$. Soit Ω' un ouvert relativement compact de Ω (ce que nous notons $\Omega' \Subset \Omega$) et soit d la distance de Ω' à $\partial\Omega$. Alors

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u| .$$

Démonstration. En effet, soit $y \in \Omega$ et soit $R < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$. La formule de la divergence (Formule (III.3), page 42) appliquée à $(0, \ldots, u, \ldots, 0)$, u à la i-ème place, donne, en notant ν_i la i-ème composante du vecteur unitaire normal sortant de $\partial B(y,R)$,

$$\int_{B(y,R)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\partial B(y,R)} u \nu_i \, d\sigma,$$

et, comme $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est harmonique, la formule de la moyenne (Théorème III.2.1) donne alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B(y,R)} u \nu_i \, d\sigma .$$

Ainsi $|D^\alpha u(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{B(y,R)} |u|$ pour $|\alpha| = 1$. Par récurrence sur α, on montre alors facilement que

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{R}\right)^{|\alpha|} \sup_{B(y,R)} |u| ,$$

pour tout α. La formule de la Proposition s'obtient alors en considérant $R > 0$ tel que, $\forall y \in \Omega'$, $R < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$. □

THÉORÈME III.3.3.

Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, l'espace des fonctions harmoniques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est un espace de Montel (c.f. Corollaire de la Proposition II.2.10).

Démonstration. En effet, il suffit de recopier la preuve du Corollaire de la Proposition II.2.10 et d'utiliser le Corollaire du Théorème III.3.2. □

III.4 Cas particulier de la dimension 2, liens avec les fonctions holomorphes

III.4.1 Noyaux de Green et de Poisson du disque unité et fonctions

harmoniques

THÉORÈME III.4.1.
*Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Une fonction $u\,\Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle que $u = \Re e f$. De plus une telle fonction holomorphe f est unique à l'addition d'une constante imaginaire pure près et sa partie imaginaire (définie à une constante additive réelle près) s'appelle une **conjuguée harmonique** de u.*

Démonstration. Si f est holomorphe, alors $\Re e f$ est harmonique, puisque $\triangle \Im e f = 2\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial z}\left(f+\overline{f}\right) = 0$. Montrons la réciproque. Si u est harmonique sur Ω, la forme différentielle $\omega = \frac{\partial u}{\partial z} dz$ est fermée donc exacte puisque Ω est supposé simplement connexe (Théorème I.3.2). Soit donc $g \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $dg = \omega$ c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = 0$ de sorte que g est holomorphe sur Ω et donc $d\left(g+\overline{g}\right) = \frac{\partial g}{\partial z}dz + \overline{\frac{\partial g}{\partial z}}d\bar z = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \bar z}d\bar z = du$, l'avant dernière égalité provenant du fait que u est réelle. Ceci implique qu'il existe une constante réelle C telle que $g+\overline{g} = u + C$. Si on pose $f = 2g - C$ on a bien $\Re e f = u$. L'unicité de f est évidente car une fonction holomorphe de partie réelle nulle est constante. □

Noter que si on enlève l'hypothèse « Ω simplement connexe » la conclusion peut être mise en défaut. Par exemple, dans une couronne $C = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $0 \le r_1 < |z| < r_2 \le +\infty\}$ la fonction $u(z) = \log|z|$ est harmonique et s'il existe une fonction $f \in H(C)$ de partie réelle égale à u, alors il existe une constante λ telle que, dans $C \setminus \mathbb{R}_*^+$, on a $f(z) = \log(z) + i\lambda$ ce qui montre que f n'est pas continue dans C.

Nous allons maintenant expliciter les noyaux de Green et de Poisson du disque unité du plan complexe. Rappelons tout d'abord que nous notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ centré à l'origine et $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1\}$ sa frontière. Les calculs de la Section précédente montrent alors que :

PROPOSITION III.4.1.
Avec les notations de ci-dessus :
- *Le noyau de Green de $\mathbb{D}$ est donné par la formule :*

$$G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| - \log\left(|\zeta|\left|z - \frac{\zeta}{|\zeta|^2}\right|\right),$$

pour $\zeta \neq 0$ et $G(z,0) = \log|z|$.
- *Le noyau de Poisson de $\mathbb{D}$ est donné par la formule :*

$$P(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2},$$

$z \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \mathbb{T}$.

Pour toute fonction $u \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ on a donc, pour $z \in \mathbb{D}$:

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} G(z,\zeta)\triangle u(\zeta)\,d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Si on pose $z = re^{i\vartheta}$ et $\zeta = e^{it}$ il vient

$$P(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{\left|1-re^{i(\vartheta-t)}\right|^2} = \Re e\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$$

(voir ci-dessous la preuve de la Proposition III.4.3 pour la dernière égalité) et on note souvent

$$P_r(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{i\vartheta}|}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\left(e^{it}\right)\frac{1-r^2}{\left|1-r^{i(\vartheta-t)}\right|^2}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(P_r * \tilde u\right)(\vartheta),\end{aligned}$$

où $\tilde{u}(t) = u\left(e^{it}\right)$, ce qui montre que l'intégrale de Poisson $\int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)u(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ est une convolution (sur $[-\pi,\pi]$ ou $\mathbb{T}$) avec le noyau P_r.

On identifie généralement $\mathbb{T}$ et $[0,2\pi]$, et, par abus de notations, on note parfois $\tilde{u}$ et u par la même lettre.

Cette écriture de l'intégrale de Poisson est utile, en particulier, lorsque l'on se rappelle de la propriété suivante (ainsi que celles de la convolution avec une unité approchée) :

PROPOSITION III.4.2.

Le noyau P_r est une unité approchée quand $r \to 1$ (i.e. $P_r \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta)\frac{d\vartheta}{2\pi} = 1$ et $P_r(\vartheta) \to 0$ uniformément sur $[-\pi,\pi] \cap \{|\vartheta| \geq \eta > 0\}$ quand $r \to 1$).

PROPOSITION III.4.3.

Le noyau P_r se développe en série de fonction par la formule

$$P_r(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\vartheta},$$

la série convergeant uniformément pour $r < 1$.

Démonstration. La convergence uniforme est évidente et comme, pour $n \geq 0$, $e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta} = 2\Re e^{in\vartheta}$, on a (en notant $z = re^{i\vartheta}$)

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\vartheta} &= 1 + 2\Re\mathrm{e}\sum_{1}^{\infty} r^n e^{in\vartheta} \\
&= 1 + 2\Re\mathrm{e}\sum_{1}^{\infty} z^n = 1 + 2\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) \\
&= \Re\mathrm{e}\left(1 + 2\frac{z}{1-z}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\vartheta}|^2}.
\end{aligned}$$

□

DÉFINITION III.4.1.

Soit μ une mesure borélienne (complexe) sur $\mathbb{T}$. On appelle **transformée de Poisson** de μ la fonction harmonique $P(\mu)$ définie dans $\mathbb{D}$ par

$$P(\mu)\left(re^{i\vartheta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)\,d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}P_r * \mu(\vartheta) = \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)$$

où, par abus de notations, on a noté par μ la mesure sur $\mathbb{T}$ et la mesure qui s'en déduit sur $[-\pi,\pi]$.

En particulier la transformée de Poisson de μ est la partie réelle de la fonction holomorphe f définie sur $\mathbb{D}$ par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t),\ z \in \mathbb{D}.$$

La Proposition III.4.3 donne alors

$$\begin{aligned}
P(\mu) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,d\mu(t) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\mu)r^{|n|}e^{in\vartheta},
\end{aligned} \tag{III.10}$$

et les coefficients $c_n(\mu)$ sont donc les coefficients de Fourier de la mesure μ. Par exemple pour la mesure $\mu(t) = \varphi(t)dt$, avec $\varphi \in L^1([-\pi,\pi])$, ces coefficients sont les coefficients de Fourier classiques de φ.

D'autre part, par définition, on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_r * \mu(\vartheta)|\,d\vartheta \leq \int_{-\pi}^{\pi} d|\mu| = \|\mu\|$ (propriétés de P_r rappelées à la Proposition III.4.2) il vient $\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|P_r * \mu(\vartheta)|\,d\vartheta < +\infty$. Réciproquement :

THÉORÈME III.4.2.

Soit h une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ telle que $\sup_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h\left(re^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta < +\infty$. Alors il existe une mesure de Borel μ sur $\mathbb{T}$ telle que $h\left(re^{i\vartheta}\right) = P_r * \mu(\vartheta)$.

Démonstration. Pour $s \in [0,1[$, posons $h_s(\vartheta) = h\left(se^{i\vartheta}\right)$. Par hypothèse la famille de fonctions h_s est bornée dans $L^1([0,2\pi])$ donc dans l'espace $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ de mesures de Borel sur $[0,2\pi]$. Comme ce dernier espace est le dual de l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ (identifié à $[0,2\pi]$), le Théorème de Banach-Alaoglu dit que l'ensemble $\{h_s,\ s \in [0,1[\}$ est relativement compact pour la topologie faible de $\mathscr{M}(\mathbb{T}) = \mathscr{C}(\mathbb{T})'$. Il existe donc une suite $(s_j)_j$ qui tends vers 1 et une mesure de Borel μ sur $\mathbb{T}$ telle que la suite $\left(h_{s_j}\right)_j$ converge faiblement vers μ, c'est-à-dire telle que, pour toute fonction ψ continue sur $\mathbb{T}$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_{s_j}(t)\psi(t)\,dt = \int_{\mathbb{T}} \psi(t)\,d\mu(t).$$

En appliquant ceci à $\psi(t) = P_r(\vartheta - t)$ il vient

$$h\left(re^{i\vartheta}\right) = \lim_{j\to\infty} h\left(s_j re^{i\vartheta}\right) = P_r * \mu(\vartheta)$$

puisque les fonction h_{s_j} sont harmoniques dans $\mathbb{D}$ et continues dans son adhérence. □

Corollaire.

*Toute fonction harmonique **positive** u sur $\mathbb{D}$ s'écrit $u\left(re^{i\vartheta}\right) = P_r * \mu(\vartheta)$ où μ est une mesure positive sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. En effet, puisque que u est positive, la formule de la moyenne s'écrit $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{it}\right)\right| dt$, pour tout $r < 1$ de sorte que l'on peut appliquer le Théorème. La positivité de μ vient du fait qu'elle est limite faible de fonctions positives. □

III.4.2 *Fonctions sous-harmoniques*

Proposition III.4.4.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors la fonction (qui est à valeurs dans $[-\infty,+\infty[$) $\log|f|$ est sous-harmonique.

Démonstration. En effet, il est clair que cette fonction est semi-continue supérieurement puisque l'ensemble $\{\log|f| < \lambda\} = \left\{|f| < e^{-\lambda}\right\}$ est ouvert. Supposons donc $\log|f| \le u$ sur le bord d'un disque fermé $D = D(z_0,r)$ contenu dans Ω, u étant continue sur D harmonique dans son intérieur. Comme $u = \Re e h$ avec h holomorphe dans l'intérieur de D, si, pour $0 < \eta < 1$, on pose $h_\eta(z) = h(z_0 + (1-\eta)(z - z_0))$, par continuité uniforme de u, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour $0 < \eta \le \eta_\varepsilon$ on a $\left|fe^{-h_\eta}\right| \le 1+\varepsilon$ sur le bord de D. Le principe du maximum (Proposition II.2.8) donne $\left|fe^{-h_\eta}\right| \le 1+\varepsilon$ dans D, c'est-à-dire $\log|f(z)| \le (1+\varepsilon)\,u(z_0 + (1-\eta)(z-z_0))$ dans D, pour tout $0 < \eta \le \eta_\varepsilon$, soit $\log|f(z)| \le (1+\varepsilon)\,u(z)$ $\forall \varepsilon > 0$ ce qui conclut. □

Proposition III.4.5.

Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue croissante. On pose $\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ (qui existe dans $[-\infty,+\infty[$). Alors $\varphi \circ u$ est sous-harmonique.

Démonstration. Il est clair que $\varphi \circ u$ est semi-continue supérieurement. Comme φ est convexe, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un réel k (dépendant de x_0) tel que $\varphi(x) \ge \varphi(x_0) + k(x - x_0)$. Par suite, pour toute boule fermée $B = B(x,r)$ contenue dans Ω

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} \varphi(u(\xi))\,d\sigma(\xi) \ge \varphi(x_0) + k\left[\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(\xi)\,d\sigma(\xi) - x_0\right].$$

En choisissant $x_0 = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(\xi)\,d\sigma(\xi)$, il vient ($\varphi$ étant croissante)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} \varphi(u(\xi))\,d\sigma(\xi) \quad &\ge \quad \varphi\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(\xi)\,d\sigma(\xi)\right) \\ &\ge \quad \varphi(u(x)) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\varphi \circ u$ vérifie la propriété de sous-moyenne sphérique pour B. □

Corollaire.

Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, pour $\alpha > 0$, la fonction $|f|^\alpha$ est sous-harmonique.

Démonstration. En effet, la fonction $\alpha \log|f| = \log|f|^\alpha$ est sous-harmonique d'après la Proposition III.4.4, et comme $|f|^\alpha = e^{\log|f|^\alpha}$ il suffit d'appliquer la Proposition à la fonction convexe croissante $x \mapsto e^x$. □

Proposition III.4.6.

Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω. Alors si u n'est pas identiquement égale à $-\infty$ sur une composante connexe de Ω, elle est localement intégrable dans Ω.

Démonstration. Si $u(z) > -\infty$ et si $B(z,r)$ est un disque fermé contenu dans Ω (*quelconque*), on a $-\infty < u(z) = \frac{1}{|B|}\int_B u\,d\lambda$ et comme, par semi-continuité supérieure, u est majorée uniformément sur tout compact de Ω, u est intégrable sur B. Soit maintenant E l'ensemble des points de Ω possédant un voisinage sur lequel u est intégrable. Par hypothèse le raisonnement précédent montre que E rencontre toutes les composantes connexes de Ω. De plus, par ce qui précède, si $z \in \Omega \setminus E$, u est identiquement égale à $-\infty$ au voisinage de z (sinon on peut trouver un disque fermé contenu dans Ω, contenant z et centré en un point ζ tel que $u(\zeta) > -\infty$ et on lui applique le premier raisonnement). Ainsi E est fermé, et comme il est ouvert par définition il est égal à Ω. □

III.4.3 *Intégrale de Poisson et fonctions holomorphes*

PROPOSITION III.4.7.

Soit u une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe continue sur son adhérence. Soit $\varphi(\vartheta) = u\left(e^{i\vartheta}\right)$. Alors le développement en série entière de u dans $\mathbb{D}$ s'écrit

$$u\left(re^{i\vartheta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varphi) r^n e^{in\vartheta}$$

où $c_n(\varphi)$ est le n-ième coefficient de Fourier de φ.

De plus, si φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$ (i.e. sur $[0,2\pi]$) telle que $c_n(\varphi) = 0$ si $n < 0$, la fonction $u\left(re^{i\vartheta}\right) = P_r * \varphi(\vartheta)$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$.

Démonstration. En effet, comme u est harmonique elle est égale à la transformée de Poisson de ses valeurs au bord et la formule (III.10) donne

$$u\left(re^{i\vartheta}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(\varphi) r^{|n|} e^{in\vartheta}.$$

Or

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} u\left(e^{it}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{z}^{n+1} u(z) dz. \end{aligned}$$

Si $n < 0$, sur $\mathbb{T}$, $\overline{z}^{n+1} = z^{|n|-1}$ et comme $z^{|n|-1}u(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$ continue sur son adhérence le Théorème de Cauchy (Théorème II.1.1) donne $c_n(\varphi) = 0$, d'où la Proposition (la dernière partie est évidente puisque $u(z) = \sum_0^{+\infty} c_n(\varphi) z^n$). □

On interprète ce résultat en disant que « les valeurs au bord » des fonction holomorphes dans $\mathbb{D}$ sont les fonctions dont les coefficients de Fourier négatifs sont nuls.

Exercices

EXERCICE III.1 (fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n$).

1. Montrer que, si $n \geq 3$, la fonction
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|^{2-n}$$
est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$.
2. Montrer que, si $x \mapsto f(x) = g(\|x\|)$ est une fonction de classe C^2 et radiale dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors
$$\Delta[f](x,y) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$
Trouver toutes les fonctions harmoniques radiales dans $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$.
3. Vérifier que, si φ est une fonction de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^n$,
$$\varphi(0) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)} \pi^{-n/2} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \Delta[\varphi(x)] \, \|x\|^{2-n} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Indication : *on pensera à la formule de Green-Ostrogradski ; on rappellera le calcul du volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$*, puis celui de la surface de la sphère unité (dont on aura besoin ici).*

EXERCICE III.2 (la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^n$).
Soit U un voisinage du simplexe $\Delta_0 = \{t_1 + \cdots + t_n \leq 1\,; t_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$. Vérifier, pour un tel simplexe et toute $(n-1)$-forme ω de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Delta}_0$ que l'on a la formule

$$\int \ldots \int_{\Delta_0} d\omega = \int \ldots \int_{\partial \Delta_0} \omega$$

après avoir donné un sens au membre de droite. Pourquoi retrouve-t-on bien ici la *formule de la divergence* mentionnée en cours ? Comment établirait-t-on la même formule lorsque Δ_0 est remplacé par son image $\Phi(\Delta_0)$ par un difféomorphisme de classe C^2 ? Comment en déduirait-on la formule de la divergence pour un ouvert borné de frontière assez régulière ?

EXERCICE III.3 (harmonicité et propriétés de moyenne).
Soit u une fonction de classe C^2 dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour toute boule fermée $\overline{B}$ incluse dans Ω, on ait

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\rm ext}}\, d\sigma = 0\,,$$

où σ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B}$. Montrer que u est harmonique dans Ω.

EXERCICE III.4 (harmonicité et formule de la moyenne (théorème de Kellog)).
Soit u une fonction continue réelle dans la boule fermée $\overline{B(0,R)}$ de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout x dans la boule ouverte $B(0,R)$, il existe $r(x) \in]0, d(x, \partial B)[$ tel que

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n (r(x))^{n-1}} \int_{\delta B(x, r(x))} u\, d\sigma_{B(x, r(x))},$$

où $\sigma_{B(x,r(x))}$ désigne la mesure surfacique sur le bord de $\overline{B(x, r(x))}$.

1. Comment s'exprime l'unique fonction v harmonique dans $B(0,R)$, continue dans $\overline{B(0,R)}$, et telle que $v = u$ sur le bord de $\overline{B(0,R)}$?
2. On note $w = u - v$ et $M := \max_{\overline{B(0,R)}} w$ et l'on suppose $M > 0$. On suppose que l'ensemble $E = \{w = M\} \cap B(0,R)$ est non vide. Montrer qu'il existe au moins un point x_0 de $B(0,R)$ tel que
$$d(x_0, \partial B(0,R)) = d(E, \partial B(0,R)) > 0.$$
3. Montrer que
$$\int_{\partial B(x_0, r(x_0))} (w(x_0) - w)\, d\sigma_{B(x_0, r(x_0))} = 0$$
et en conclure que $w \equiv M$ dans $B(x_0, r(x_0))$. Pourquoi ceci contredit-il l'hypothèse faite sur E (E non vide) ?
4. Déduire de la contradiction établie au **c)** que u est harmonique dans $B(0,R)$.

EXERCICE III.5 (fonctions sous-harmoniques).
Soit u une fonction continue et à valeurs réelles dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler ce que signifie le fait que u est sous-harmonique dans Ω.
2. Montrer que u est sous-harmonique dans Ω si et seulement si, pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, pour toute fonction h harmonique réelle sur Ω' et continue sur $\overline{\Omega}'$, on ait
$$\forall x \in \Omega',\ u(x) - h(x) \leq \sup_{y \in \partial \Omega'} (u(y) - h(y)).$$
3. Utiliser le critère établi au 2.[1] pour montrer que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, alors $\log |f|$ est sous-harmonique dans Ω.

EXERCICE III.6 (sous-harmonicité).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction localement intégrale dans Ω, à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $r \in]0, d(x, \partial\Omega)[$,

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u\, d\sigma_{B(x,r)}.$$

[1]Se servir aussi du fait que, si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, toute fonction harmonique réelle h dans U s'exprime dans U sous la forme $h = \mathrm{Re}\, f_U$, où f_U est holomorphe dans U, cf. Théorème III.4.1 du cours. Cette question propose une autre démonstration de la Proposition III.4.4 du cours.

La fonction u est-elle sous-harmonique dans Ω ? Pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x}(u(y)).$$

Même question que précédemment pour cette fois la fonction u^*.

EXERCICE III.7 (formule de représentation ($n = 2$)).
Soit Ω ou ouvert borné du plan de frontière C^1, u une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Vérifier la formule de représentation :

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(\zeta)\log|\zeta - z|\,d\sigma(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(\zeta)\frac{\partial}{\partial \nu_{\text{ext}}}\Big[\log|\zeta - z|\Big]\,d\sigma(\zeta),$$

où $d\sigma$ représente la mesure lineique sur le bord de $\partial\Omega$. Que devient cette formule de représentation en dimension n ? Que devient cette formule de représentation lorsque u est de classe C^2 dans Ω, mais n'est plus supposée harmonique ?

EXERCICE III.8 (principe de réflexion pour les fonctions harmoniques).
Soit u une fonction harmonique dans $]a,b[+i]0,\delta[$, se prolongeant à $]a,b[+i[0,\delta[$ de manière continue, nulle sur le segment réel $]a,b[$. Montrer que la fonction définie dans l'ouvert $]a,b[+i]-\delta,\delta[$ par $v(z) = u(z)$ si $\mathrm{Im}\,z \geq 0$ et $v(z) = -v(\bar{z})$ si $\mathrm{Im}\,z \leq 0$ est harmonique dans $]a,b[\times i]-\delta,\delta[$.

EXERCICE III.9 (mesure harmonique).
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière C^1. On suppose qu'étant donnée une fonction continue quelconque $\varphi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$, il existe une fonction $P[\varphi]$ continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique dans Ω et égale à φ sur $\partial\Omega$.

1. Montrer qu'une telle fonction $P[\varphi]$ est unique et exprimer là en termes de la fonction de Green G_Ω de l'ouvert Ω (on admet l'existence d'une telle fonction de Green).
2. Montrer que l'espace des fonctions continues de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach E pour la norme uniforme, qu'il en est de même pour l'espace des fonctions continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ (aussi pour la norme uniforme) et que $\varphi \mapsto P[\varphi]$ est une isométrie de E dans F. En déduire que, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, l'application

$$\varphi \in E \mapsto P[\varphi](x)$$

est une forme linéaire L_x continue positive sur E, i.e une forme linéaire continue L_x telle que $L_x(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$. Peut-on donner un sens à $L_x(\chi_A)$ si A est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$? Si oui, pourquoi définit-on ainsi une mesure positive [2] L_x sur le bord de Ω ?

EXERCICE III.10.
On suppose que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'ouvert $\Omega = D(0,1) \setminus \{0\}$ du plan complexe, ce qui implique[3] que l'on puisse construire une fonction de Green G_Ω, s'écrivant donc sous la forme

$$G_\Omega(w,z) = \frac{\log|z - w|}{2\pi} + h_w(z),$$

où h_w est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique dans Ω. Pourquoi la fonction harmonique $z \mapsto h_w(z)$ a t-elle une singularité éliminable en $z = 0$? Montrer que la fonction G définie par $G(z) = G_\Omega(w,z)$ est sous-harmonique dans $D(0,1)$ et conclure à une contradiction avec le principe du maximum. En déduire que Ω ne saurait posséder de fonction de Green. Le même résultat se transpose-t'il à la dimension n ?

EXERCICE III.11 (harmonicité et propriétés de moyenne).
Soit u une fonction harmonique dans une couronne ouverte $\{R_1 < |z| < R_2\}$. On pose, pour tout $r > 0$,

$$f(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Montrer que $f(r) = a\log r + b$, où a et b sont deux constantes. Montrer que si P est un polynôme de Laurent, i.e. $P(z) = \sum_{-N}^{N} a_k z^k$, il existe une subdivision $R_0 = 0 < R_1 < \ldots < R_{m-1} < R_m = +\infty$ de $]0,\infty[$ telle que la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta}|\,d\theta$$

soit une fonction affine de $\log r$ sur chaque intervalle ouvert $]R_k, R_{k+1}[$.

[2] Cette mesure positive μ_x, qui est d'ailleurs une mesure de probabilité, a aussi une interprétation en physique, en relation avec le *mouvement brownien* dans le plan (cf. par exemple `wikipedia` pour une définition de ce processus aléatoire) : si A est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$, $\mu_x(A)$ représente la probabilité pour qu'une particule issue de x à l'instant $t = 0$ et assujettie précisément au *mouvement brownien* dans le plan s'échappe pour la première fois de l'ouvert Ω au travers d'un point de A.

[3] Voir la construction de la fonction de Green $(x,y) \mapsto G_\Omega(x,y)$ dans la Section III.3 du cours, ainsi que son expression à partir du potentiel Γ.

EXERCICE III.12 (harmonicité et holomorphie).
Montrer que toute fonction réelle harmonique dans $\mathbb{C}$ et bornée supérieurement est constante.

EXERCICE III.13 (formule de représentation de Poisson).

1. Vérifier, pour $\zeta \in \{|\zeta| = 1\}$ et $z \in D(0,1)$, la relation
$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right).$$
En déduire que si u est une fonction harmonique réelle dans $D(0,1)$ et continue dans $\overline{D(0,1)}$, l'unique fonction h (on dira au passage pourquoi elle est unique) holomorphe dans $D(0,1)$, telle que $\mathrm{Im}\, h(0) = 0$ et que $\mathrm{Re}\, h = u$ dans $D(0,1)$, est donnée par
$$h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta}.$$
2. Soit f une fonction holomorphe dans $D(0,1)$, nulle en 0, et telle que $|\mathrm{Re}\, f| \leq A$ dans $D(0,1)$. Montrer que, si $0 < r < 1$, on a, pour tout $z \in D(0,r)$,
$$|\mathrm{Im}\, f(z)| \leq \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

EXERCICE III.14 (inégalité de Harnack).
Soit u une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0,R)}$, harmonique dans $D(z_0,R)$.

1. Établir, pour tout $z \in D(z_0,R)$, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, l'inégalité :
$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \leq \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + Re^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|}.$$
2. En déduire que si u est une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0,R)}$, harmonique dans $D(z_0,R)$, on a l'*inégalité de Harnack* :
$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} u(z_0) \qquad \forall z \in D(z_0,R).$$
3. En utilisant l'inégalité établie au 1. (on pourra se ramener au cas des fonctions harmoniques positives réelles), montrer que si u est une fonction harmonique de $\mathbb{C}$ dans lui-même, bornée en module, alors u est constante (comparer avec le résultat établi dans l'Exercice III.12).

EXERCICE III.15 (intégrale de Poisson).
Pour tout $z \in D(0,1)$, on définit une fonction $\varphi_z : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ comme suit (faire un petit dessin) : le point $e^{i\varphi_z(\theta)}$ est l'intersection du cercle unité et de la demi-droite issue de z et dirigée par $e^{i\theta}$, avec la convention $0 \leq \varphi_z(\theta) - \theta < 2\pi$.

1. Montrer que φ_z est différentiable et que
$$\varphi_z'(\theta) = \left|\frac{e^{i\varphi_z(\theta)} - z}{e^{i\theta} - z}\right|.$$
2. Montrer que, si u est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, alors, si $P(u)$ désigne l'intégrale de Poisson de u,
$$P(u)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi_z(\theta)})\, d\theta.$$

EXERCICE III.16 (formule de Poisson, fonctions sous-harmoniques).
Soit u une fonction continue, positive dans $\overline{B(0,R)}$ et sous-harmonique dans $B(0,R)$. Soit $z_0 \in B(0,R)$ et C un cercle de centre z_0 inclus dans $D(0,R)$.

1. Soit v la fonction harmonique dans $D(0,R)$ égale à u sur le bord de ce disque. Comparer
$$\int_C u(z) d\sigma_C$$
et $v(z_0)$ ($d\sigma_C$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle C).
2. Utiliser la formule de Poisson pour établir :
$$\int_C u(z) d\sigma_C \leq \left(1 + \frac{|z_0|}{R}\right) \int_{\partial C(0,R)} d\sigma_{\partial D(0,R)}.$$

EXERCICE III.17 (sous harmonicité de $|f|^p$ pour f holomorphe et $p>0$).
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$. Montrer, pour tout $p>0$, l'*inégalité de Hardy* :

$$\frac{1}{\pi}\int_{D(0,1)} |f|^p\, d\lambda \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta\,.$$

EXERCICE III.18 (sous-harmonicité et convexité).
Soit u une fonction continue dans la couronne ouverte $C_{R_1,R_2} := \{0 \le R_1 < |z| < R_2 \le \infty\}$. Montrer que la fonction

$$r \mapsto \log \lambda(u,0,r) := \log\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta\right]$$

est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1,R_2[$ si et seulement si, pour tout $\alpha>0$, $r\mapsto r^\alpha\lambda(u,0,r)$ est une fonction convexe de $\log r$. Si l'on suppose en plus $\log u$ sous-harmonique dans la couronne, montrer qu'il en est de même pour

$$z \mapsto \log(u(z)) + \alpha \log|z| \text{ et } z \mapsto |z|^\alpha u(z)$$

pour tout $\alpha>0$. Calculer $\lambda(|z|^\alpha u,0,r)$ en fonction de $\lambda(u,0,r)$ si $r\in]R_1,R_2[$. Montrer enfin que si u est une fonction positive dans la couronne C_{R_1,R_2} et telle que $\log u$ soit sous-harmonique dans cette même couronne, alors $r\mapsto \log(\lambda(u,0,r))$ est une fonction convexe de $\log r$ dans $]R_1,R_2[$.

EXERCICE III.19 (inégalité de Carathéodory).
Soit g une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$, avec $g = P+iQ$ (P et Q à valeurs réelles) dans ce disque ; montrer que, pour tout $z\in D(0,R)$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}+z)}{Re^{i\theta}-z}d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(Re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}+z)}{Re^{i\theta}-z}d\theta + iQ(0) \\ &= g(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta})\frac{z}{Re^{i\theta}-z}d\theta\,. \end{aligned}$$

En déduire que, si l'on note $A_g(R) := \sup\{P(z)\,;\,|z|=R\}$, on a

$$|g(z)| \le |g(0)| + \frac{2r}{R-r}(A_g(R)-P(0))\,, \quad \forall z,\ |z|\le r<R$$

(*on appliquera la formule précédente à* $A_g(R)-g$). Montrer que, si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,R)}$, ne s'annulant pas dans $D(0,R)$ avec $f(0)=1$, alors, pour tout $r\in]0,R[$,

$$|f(z)| \ge (M_f(0;R))^{-\frac{2r}{R-r}} \qquad \forall z,\quad |z|\le r\,,$$

si

$$M_f(0;R) := \sup_{[0,2\pi]} |f(Re^{i\theta})|.$$

CHAPITRE IV

THÉORÈME DE RUNGE
ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN
ET THÉORÈME DE WEIERSTRASS

IV.1 Théorème de Runge et enveloppes d'holomorphie

Dans la démonstration du Théorème qui suit nous utiliserons la remarque topologique élémentaire suivante : si Ω est un ouvert d'un espace métrique E (ou même topologique...) et si K est un compact non vide de Ω alors la frontière d'une composante connexe de $\Omega\setminus K$qui est relativement compacte dans Ω est contenue dans K. De plus, si E est un espace normé, alors $E\setminus K$ a une seule composante connexe non bornée et si U est une composante connexe bornée de $E\setminus K$, ou bien U est relativement compacte dans Ω, auquel cas sa frontière est contenue dans K, ou bien U rencontre le complémentaire de $\overline{\Omega}$.

THÉORÈME IV.1.1 (Théorème de Runge).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact (non vide) de Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Toute fonction holomorphe au voisinage de K est limite, uniforme sur K, d'une suite de fonctions holomorphes sur Ω.*
2. *$\Omega\setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans Ω.*
3. *Pour tout point z de $\Omega\setminus K$ il existe une fonction holomorphe dans Ω telle que $|f(z)|>\sup_K|f|$.*

Démonstration. Supposons que 2. soit faux. Alors il existe une composante connexe non vide C de $\Omega\setminus K$ dont la frontière est contenue dans K. Soit $f(z)=\frac{1}{z-a}$ où a est un point de C. f est donc holomorphe au voisinage de K et 1. implique l'existence d'une suite de fonctions $f_n\in H(\Omega)$ qui converge uniformément sur K vers f. Le principe du maximum entraîne donc que cette suite converge uniformément sur C, donc sur $\overline{C}$, vers une fonction holomorphe $F\in H(C)$ continue sur $\overline{C}$. Comme $(z-a)F(z)=1$ sur ∂C, le principe du maximum implique que cette relation est aussi satisfaite sur C ce qui est absurde. Ceci montre que 1. implique 2.

Montrons maintenant que 2. entraîne 1. On raisonne par l'absurde : si 1. est faux, il existe une fonction f holomorphe au voisinage de K qui n'est pas dans l'adhérence de $H(\Omega)_{|K}$ dans l'espace $\mathscr{C}(K)$ des fonctions continues sur K muni de la topologie de la convergence uniforme. Le Théorème de Hahn-Banach implique alors qu'il existe une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(K)$ nulle sur l'adhérence de $H(\Omega)_{|K}$ dans l'espace $\mathscr{C}(K)$ et qui vaut 1 sur $f_{|K}$. Comme le dual ce $\mathscr{C}(K)$ est l'espace des mesures de Borel sur K cela signifie qu'il existe une mesure μ sur K telle que $\int_K g\,d\mu=0$ pour toute $g\in H(\Omega)$ et $\int_K f\,d\mu=1$. Montrons que cela n'est pas possible c'est-à-dire que, sous l'hypothèse 2., si μ est une mesure sur K telle que $\int_K g\,d\mu=0$ pour toute $g\in H(\Omega)$ alors nécessairement $\int_K f\,d\mu=0$.

Soit $\varphi(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Le Théorème de Morera (Théorème II.1.4) montre que φ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$ et l'hypothèse sur μ donne que φ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (car $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ appartient à $H(\Omega)$ si $z \notin \Omega$). Soit U une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Si U est bornée, l'hypothèse 2. (et les remarques qui précèdent l'énoncé du Théorème) montrent que $U \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}) \neq \emptyset$ et φ est identiquement nulle sur U (Proposition II.2.3). Si U est la composante non bornée, ou bien $U \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}) \neq \emptyset$ et, comme précédemment, φ est identiquement nulle sur U ou bien $U \subset \Omega$. Dans ce dernier cas, Soit $R > 0$ tel que $K \subset D(0,R)$. Alors, pour $z \in U \cap \{|\xi| > R\}$ la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe dans $D(0,R)$ donc développable en série entière dans ce disque, la convergence étant uniforme sur K. Autrement dit cette fonction est limite uniforme sur K de polynômes, et comme ceux-ci sont holomorphes sur Ω, l'hypothèse sur μ donne $\varphi(z) = 0$. Ainsi φ est aussi nulle sur U dans ce dernier cas et finalement φ est identiquement nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$.

Alors, si V est un voisinage relativement compact de K sur lequel f est définie et ψ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur V valant identiquement 1 au voisinage de K, la formule de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.2.1) appliquée à un disque centré à l'origine contenant V donne, pour tout $\zeta \in K$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus K} f(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - \zeta}$$

(puisque $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$ est nulle au voisinage de K) et, par suite (en appliquant le Théorème de Fubini),

$$\int_K f(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus K} f(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) \varphi(z) dz \wedge d\bar{z} = 0$$

puisque φ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$.

Montrons maintenant que 2. implique 3. Soient $z \in \Omega \setminus K$ et $D = D(z,r)$, $r > 0$, un disque d'adhérence contenue dans $\Omega \setminus K$. Comme les composantes connexes de $\Omega \setminus \left(K \cup \overline{D}\right)$ s'obtiennent en prenant celles de $\Omega \setminus K$ et en enlevant à l'une d'entre elles $\overline{D}$, elles vérifient aussi l'hypothèse 2. Ainsi, la fonction f qui vaut 1 au voisinage de $\overline{D}$ et 0 au voisinage de K est, d'après l'implication 2. $\Rightarrow$ 1. que nous avons montré ci-dessus (pour un compact K quelconque), limite uniforme sur $K \cup \overline{D}$ de fonctions holomorphes dans Ω. Par suite il existe une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que $\sup_K |f| < 1/2$ et $|f - 1| < 1/2$ sur D ce qui montre 3.

Pour finir, vérifions que 3. entraîne 2. : si 2. est faux, $\Omega \setminus K$ possède une composante connexe U dont la frontière est contenue dans K et le principe du maximum donne, pour $f \in H(\Omega)$, $\sup_U |f| \leq \sup_K |f|$ ce qui contredit 3.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Toute fonction holomorphe au voisinage de K est limite uniforme sur K d'une suite de polynômes holomorphes.*
2. *$\mathbb{C} \setminus K$ est connexe.*
3. *pour tout point $z \in \mathbb{C} \setminus K$ il existe un polynôme holomorphe P tel que $|P(z)| > \sup_K |P|$.*

Démonstration. En effet, il suffit d'appliquer le Théorème à $\Omega = \mathbb{C}$ et d'utiliser que toute fonction entière (i.e. de $H(\mathbb{C})$) est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ de polynômes (développement en série entière). □

Le Théorème de Runge amène naturellement la Définition suivante :

DÉFINITION IV.1.1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. On appelle **enveloppe d'holomorphie** de K l'ensemble

$$\widehat{K_\Omega} = \left\{ z \in \Omega \text{ tels que } \forall f \in H(\Omega),\ |f(z)| \leq \sup_K |f| \right\}.$$

On dit que K est **holomorphiquement convexe** si $K = \widehat{K_\Omega}$.

On notera que la propriété d'être holomorphiquement convexe dépends fortement de l'ouvert Ω dans lequel on considère K. De plus il est clair que $\widehat{\left(\widehat{K_\Omega}\right)_\Omega} = \widehat{K_\Omega}$.

PROPOSITION IV.1.1.

Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. *$\widehat{K_\Omega}$ est compact dans Ω et* $\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \operatorname{dist}\left(\widehat{K_\Omega}, \mathbb{C} \setminus \Omega\right)$.
2. *$\widehat{K_\Omega}$ est la réunion de K et des composantes connexes de $\Omega \setminus K$ qui sont relativement compacts dans Ω.*

Démonstration. Si $a \notin \Omega$ alors $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe dans Ω et, pour $z \in \widehat{K_\Omega}$, on a $\left|\frac{1}{z-a}\right| \leq \sup_{\zeta\in K}\left|\frac{1}{\zeta-a}\right|$, soit $\operatorname{dist}(a,K) \leq \operatorname{dist}(a,z)$ d'où $\operatorname{dist}(a,K) \leq \operatorname{dist}\left(a, \widehat{K_\Omega}\right)$, ce qui donne le 1.

Si O est une composante connexe de $\Omega \setminus K$ relativement compacts dans Ω, on a $\partial O \subset K$ donc, par le principe du maximum, $\forall f \in H(\Omega)$, $\forall z \in O$, $|f(z)| \leq \sup_K |f|$ et $O \subset \widehat{K_\Omega}$. Ainsi, si L est l'union décrite dans le 2., elle est incluse dans $\widehat{K_\Omega}$. De plus, $\Omega \setminus L$ étant la réunion des composantes connexes de $\Omega \setminus K$ non relativement compacts dans Ω, L est fermé et le Théorème de Runge montre que, pour $z \notin L$, existe une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que $|f(z)| > \sup_L |f| = \sup_K |f|$ ce qui montre que $\widehat{K_\Omega} \subset L$. □

Exemple IV.1.1 (Suite croissante exhaustive de compacts holomorphiquement convexes). Soit K_n une suite croissante de compacts d'un ouvert Ω dont la réunion est égale à Ω (une telle suite est dite *exhaustive*). Si pour tout entier n on pose $L_n = \widehat{(L_{n-1} \cup K_n)}_\Omega$, la Proposition dit que la suite L_n est une suite croissante exhaustive de compacts holomorphiquement convexes de Ω dont la réunion est égale à Ω. L'existence d'une telle suite est souvent utile comme nous le verrons par la suite.

Le Théorème qui suit est une version du corollaire du Théorème de Runge pour des compacts du plan dont le complémentaire n'est pas connexe :

THÉORÈME IV.1.2 (Théorème de Runge).

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Soit A un ensemble contenant exactement un point de chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors si f est une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de K il existe une suite de fractions rationnelles (de la variable z) à pôles dans A qui converge uniformément vers f sur K.

Esquisse de la démonstration. La preuve, que nous ne détaillerons pas, est tout à fait semblable à celle de l'implication 2. $\Rightarrow$ 1. du Théorème de Runge (Théorème IV.1.1) : il faut montrer que si μ est une mesure de Borel sur K telle que $\int_K R\,d\mu = 0$ pour toute fraction rationnelle à pôles dans A alors $\int_K f\,d\mu = 0$. Ceci se fait, comme dans la démonstration précédente, en introduisant la fonction $\varphi(z) = \int_K \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}$ et en montrant qu'elle est nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$, ce qui se fait cette fois-ci en développant en série entière $\frac{1}{\zeta-z}$ autour de chaque point de A (si $\alpha \in A$, $\frac{1}{\zeta-z}$ est limite des fractions rationnelles $\sum_{k=0}^{n} \frac{(z-\alpha)^k}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$) et on conclut comme précédemment. Les détails sont laissés au lecteur. □

COROLLAIRE.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A un ensemble contenant un point de chaque composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Alors, pour toute fonction $f \in H(\Omega)$ il existe une suite de fractions rationnelles à pôles dans A qui converge vers f uniformément sur les compacts de Ω.

Schéma de la démonstration. On considère une suite croissante K_n de compacts holomorphiquement convexes de Ω dont la réunion est égale à Ω. Chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K_n$ contient donc une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. On applique alors le Théorème précédent à chaque K_n et on conclut en utilisant un procédé diagonal. □

À l'aide du Théorème de Runge on peut construire des fonctions holomorphes ayant un comportement surprenant :

Exemple IV.1.2. Soit $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ qui converge ponctuellement vers 0 (i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = 0, \forall z \in \mathbb{D}$) telle que, pour tout $r > 0$ $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sup\limits_{\{|z|<r\}} |f_n| = +\infty$.

Démonstration. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ posons

$$K_\varepsilon^1 = \left\{z = re^{i\vartheta} \text{ tels que } \varepsilon < r < 1-\varepsilon,\ \vartheta \in [\varepsilon, 2\pi]\right\} \cup \{0\},$$

$$K_\varepsilon^2 = \left\{z = re^{i\varepsilon/2},\ \varepsilon < r < 1-\varepsilon\right\}$$

et $K_\varepsilon = K_\varepsilon^1 \cup K_\varepsilon^2$.

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dans la plan valant 0 au voisinage de K_ε^1 et 1 au voisinage de K_ε^2. D'après le Théorème de Runge (Théorème IV.1.1) il existe une fonction f_ε holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $|f - f_\varepsilon| \leq \varepsilon$ sur K (remarquer que $\mathbb{D} \setminus K$ est connexe). Comme $\bigcup_n K^1_{1/n} = \mathbb{D}$, la suite $\left(f_{1/n}\right)_n$ converge ponctuellement vers 0. Si cette suite était bornée dans un disque $\{|z| < r\}$, $r > 0$, le Théorème de Montel (Corollaire de la Proposition II.2.10) implique qu'il existerait une sous-suite $\left(f_{1/n_p}\right)_p$ qui converge uniformément sur le disque $\{|z| < r/2\}$, et, par ce qui précède cette limite devrait être 0 ce qui est impossible puisque, pour $\varepsilon < r/4$, le disque $\{|z| < r/2\}$ contient des points de K_ε^2 où f_ε vaut 1. □

IV.2 Résolution $\mathscr{C}^\infty$ des équations de Cauchy-Riemann

On appelle « équation de Cauchy-Riemann » l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$ où f est une fonction définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Théorème IV.2.1.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω. Alors il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$.

Démonstration. Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme. *Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction*

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\lambda(\zeta)$$

est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}$ et vérifie $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \varphi$.

Démonstration du Lemme. Par changement de variables on a

$$\pi u(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z+u)}{u} d\lambda(u).$$

En dérivant par rapport à $\bar z$ et en refaisant un changement de variables il vient

$$\pi \frac{\partial u}{\partial \bar z}(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi / \partial \bar z(\zeta)}{\zeta - z} d\lambda(\zeta),$$

et comme φ est à support compact, la formule de Cauchy-Pompeïu (Proposition I.2.1) montre que cette dernière intégrale est égale à $\pi \varphi(z)$. □

Démonstration du Théorème. Soit K_n, $n \geq 1$, une suite exhaustive de compacts holomorphiquement convexes de Ω (Exemple IV.1.1). Pour tout entier n, soit ψ_n une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω, $0 \leq \psi \leq 1$, qui vaut 1 au voisinage de K_n, et posons $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$, $j > 1$. Ainsi, pour $j > 1$, φ_j est nulle au voisinage de K_{j-1} et $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j \equiv 1$ dans Ω. D'après le Lemme, pour chaque j, il existe une fonction u_j, $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{C}$, telle que $\frac{\partial u_j}{\partial \bar z} = \varphi_j f$, et, en particulier, u_j est holomorphe au voisinage de K_{j-1}. Le Théorème de Runge (Théorème IV.1.1) donne, pour tout j, une fonction v_j, holomorphe dans Ω, telle que $\left|u_j - v_j\right| \leq 2^{-j}$ sur K_{j-1}. Posons $u = \sum_{j=1}^\infty (u_j - v_j)$, série qui converge uniformément sur tout compact de Ω par ce qui précède. Comme la somme $\sum_{j+1}^\infty (u_l - v_l)$ est composée de fonctions holomorphes au voisinage de K_j, elle est holomorphe dans le même voisinage. Ainsi u est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω, et, dans un voisinage de K_j, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar z} &= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\sum_{l=1}^{j} (u_l - v_l)\right) = \sum_{l=1}^{j} \frac{\partial u_l}{\partial \bar z} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{j} \varphi_l\right) f = \psi_j f = f, \end{aligned}$$

puisque ψ_j vaut 1 au voisinage de K_j. □

Comme première application de ce Théorème nous donnons le Théorème de Cousin ce qui donnera l'occasion de rappeler la notion de partition de l'unité :

Théorème IV.2.2 (Problème de Cousin).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{C}$ dont la réunion est égale à Ω. Pour tout couple (i,k) d'entiers non nuls soit g_{jk} une fonction holomorphe dans $\Omega_j \cap \Omega_k$. On suppose que :

1. *Pour tous j, k, dans $\Omega_j \cap \Omega_k$ on a $g_{jk} = -g_{kj}$;*
2. *Pour tous j, k, l, dans $\Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l$ on a $g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0$.*

Alors, pour tout entier $j \geq 1$ il existe une fonction h_j holomorphe dans Ω_j telle que, $\forall j,k \geq 1$, dans $\Omega_j \cap \Omega_k$, on ait $g_{jk} = g_k - g_j$.

Démonstration. Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme (Partition de l'unité). *Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega = \bigcup_{i\in I}\omega_i$. Alors il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_*}$ de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dans ω à supports compacts dans ω telle que :*

1. *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe $i_k \in I$ tel que le support de φ_k soit contenu dans ω_{i_k} ;*
2. *Pour tout compact K contenu dans ω, il existe au plus un nombre fini de fonctions φ_k non identiquement nulles sur K ;*
3. *$\sum_{k=1}^\infty \varphi_k \equiv 1$ sur ω (cette somme est finie en tout point de ω d'après le 2. ci-dessus).*

Preuve du Lemme. L'existence de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support précisé résulte du Lemme suivant :

Lemme. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et L un compact contenu dans U. Il existe une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(U)$ à support compact, $0 \leq \psi \leq 1$, valant 1 sur L.*

Démonstration. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Un lemme élémentaire de topologie dit que les ensembles $V_r(L) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } d(x,L) < r\}$ forment un système fondamental de voisinages de L de sorte qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour $0 < r \leq r_0$ les $V_r(L)$ sont contenus dans U. Soient $0 < r_1 < r_2 < r_0$ et $h(x) = \dfrac{d\left(x, \mathbb{R}^n \setminus V_{r_2}(L)\right)}{d\left(x, \mathbb{R}^n \setminus V_{r_2}(L)\right) + d\left(x\mathbb{R}^n \setminus V_{r_1}(L)\right)}$. Comme le dénominateur de cette fraction ne s'annule pas h est continue, elle vaut identiquement 1 sur $V_{r_1}(L)$ et son support est contenu dans l'adhérence de $V_{r_2}(L)$. La fonction du Lemme s'obtient alors en convolant h avec une suite régularisante χ_ε et en prenant $\psi = h * \chi_\varepsilon$ pour ε assez petit. □

Démonstration de Lemme de partition de l'unité. Soit S un sous-ensemble dénombrable de ω. Pour tout $x \in S$ on considère toutes les boules $B(x,r)$, $r \in \mathbb{Q}$, qui sont contenues dans un des ω_i, $i \in I$. L'ensemble des ces boules est dénombrable et on les note $B_k = B(x_k, r_k)$, $k \in \mathbb{N}_*$. Pour tout k on note V_k la boule $V_k = B(x_k, {}^{r_k}/_2)$ et $\widetilde{\varphi_k}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans B_k, $0 \leq \widetilde{\varphi_k} \leq 1$, valant identiquement 1 sur V_k (Lemme précédent). On pose alors $\varphi_1 = \widetilde{\varphi_1}$, $\varphi_k = \widetilde{\varphi_k}\prod_{j=1}^{k-1}(1-\widetilde{\varphi_j})$ pour $k \geq 2$. Par récurrence, il est clair que $0 \leq \varphi_j \leq 1$. De plus, $\varphi_1 = 1-(1-\varphi_1)$, et, en raisonnant par récurrence, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1}\varphi_j &= \left(\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\right) + \varphi_{k+1} = 1 - \prod_{j=1}^{k}(1-\widetilde{\varphi_j}) + \widetilde{\varphi_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}(1-\widetilde{\varphi_j}) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^{k+1}(1-\widetilde{\varphi_j}).\end{aligned}$$

Alors, pour tout k on a

$$0 \leq \sum_{j=1}^{k}\varphi_j \leq 1 \tag{IV.1}$$

et, si $x \in V_l$, on a $1-\widetilde{\varphi_l}(x) = 0$, donc

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x) = 1 \text{ pour } x \in V_l,\ l \leq k. \tag{IV.2}$$

.

Par hypothèse, pour tout $y \in \omega$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in S$ tel que $|y - x_\varepsilon| < \varepsilon$ et il existe $i \in I$ et $r > 0$ tels que $B(y,r) \subset \omega_i$. Il en résulte que $B(x_\varepsilon, r-\varepsilon) \subset \omega_j$ et que, pour ε suffisamment petit, $y \in B\left(x_\varepsilon, \frac{r-\varepsilon}{2}\right)$. On peut trouver $\tilde{r} \in \mathbb{Q}$ assez proche de $r-\varepsilon$, ε petit, tel que $y \in B(x_\varepsilon, {}^{\tilde{r}}/_2)$ et $B(x_\varepsilon, \tilde{r}) \subset \omega_i$. Comme $B(x_\varepsilon, {}^{\tilde{r}}/_2)$ est l'un des V_k, ce raisonnement montre que la réunion des V_k est égale à ω.

Si K est un compact de ω, il est donc recouvert par un nombre fini de V_k, soit $K \subset V_{k_1} \cup \ldots \cup V_{k_m}$, $k_1 < \ldots < k_m$ par exemple. L'équation (IV.2) implique alors $\sum_{j=1}^{k_m}\varphi_j \equiv 1$ sur K et (IV.1) montre que, pour $j > k_m$, φ_j est identiquement nulle sur K. D'où le Lemme. □

Démonstration du Théorème IV.2.2. Le Lemme de partition de l'unité donne l'existence de deux suites φ_ν et i_ν telles que φ_ν soit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω_{i_ν}, toutes le φ_ν sauf au plus un nombre fini étant identiquement nulles sur un compact de Ω, et $\sum_\nu \varphi_\nu \equiv 1$ sur Ω.

Posons $h_k = \sum_\nu \varphi_\nu g_{i_\nu k}$. Cette somme a bien un sens (d'après ce qui précède) et défini une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω_k. De plus l'hypothèse 2. du Théorème montre que, sur $\Omega_k \cap \Omega_j$, on a

$$\begin{aligned}h_k - h_j &= \sum_\nu \varphi_\nu\left(g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j}\right) = -\sum_\nu \varphi_\nu\left(g_{k i_\nu} + g_{i_\nu j}\right) \\ &= \sum_\nu \varphi_\nu g_{jk} = g_{jk}.\end{aligned}$$

Ainsi $h_k - h_j$ est holomorphe sur $\Omega_k \cap \Omega_j$ ce qui implique que les fonctions $\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}{}_{|\Omega_k}$ définissent une une fonction globale $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω (elle se « recollent » sur $\Omega_k \cap \Omega_j$). Le Théorème IV.2.1 donne alors une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle, pour tout k, $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}$ sur Ω_k. Alors $g_k = h_k + \psi$ est holomorphe dans Ω_k et $g_k - g_j = h_k - h_j = g_{jk}$ dans $\Omega_k \cap \Omega_j$. □

IV.3 Le Théorème de Weierstrass

Le but principal de cette Section est de démontrer le Théorème suivant :

THÉORÈME IV.3.1 (Théorème de Weierstrass).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_*}$ une suite de points de Ω, sans point d'accumulation dans Ω, et $(n_j)_{j\in\mathbb{N}_*}$ une suite d'entiers relatifs non nuls (i.e. dans $\mathbb{Z}_*$). Alors il existe une fonction f méromorphe dans Ω telle que, pour tout $j\in\mathbb{N}_*$, $z\mapsto(z-z_j)^{-n_j}f(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans un voisinage de z_j et qui est holomorphe sans zéros dans $\Omega\setminus\{z_j,\ j\in\mathbb{N}_*\}$.

COROLLAIRE.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle que, quelque soit l'ouvert $\widetilde{\Omega}$ contenant strictement Ω, il n'existe pas de fonction $\widetilde{f}$ holomorphe dans $\widetilde{\Omega}$ dont la restriction à Ω soit égale à f.

Preuve du Corollaire. En effet, si on choisit une suite $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_*}$ de points de Ω, sans point d'accumulation dans Ω, telle que $\partial\Omega$ soit contenu dans l'adhérence de $\{z_j,\ j\in\mathbb{N}_*\}$ (ce qui est bien sûr toujours possible) et une suite d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}_*}$ tous égaux à 1, le principe des zéros isolés (Proposition II.2.3) montre que la fonction donnée par le Théorème réponds à la question. □

Le résultat qui suit est parfois considéré comme une version du Théorème de Weierstrass et est souvent appelé le « Théorème d'interpolation de Mittag-Leffler » :

THÉORÈME IV.3.2 (Théorème de Mittag-Leffler).

Soit $S=\{z_j,\ j\geq 1\}$ et $\Sigma=\{\zeta_j,\ j\geq 1\}$ deux suites discrètes disjointes dans un ouvert Ω du plan complexe. Soient $\Lambda=\{\lambda_j,\ j\geq 1\}$ une suite de nombres complexes, $(m_j)_{j\geq 1}$ et $(n_j)_{j\geq 1}$ deux suites d'entiers positifs, $m_j>0$, $n_j\geq 0$. Alors il existe une fonction f méromorphe dans Ω telle que, pour tout $i\geq 1$, z_i est un zéro d'ordre m_i de $f-\lambda_i$, et, pour tout $j\geq 1$ f a un pôle d'ordre n_j au point ζ_j.

Démonstration. Pour tout $i\geq 1$ soit $D_i=D(z_i,r_i)$ un disque centré en z_i contenu dans Ω. On suppose que l'on a choisit les D_i deux à deux disjoints et que leur réunion ne rencontre pas Σ. Pour chaque $i\geq 1$ soit χ_i une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans D_i , $0\leq\chi_i\leq 1$, valant 1 au voisinage de l'adhérence du disque $\widetilde{D_i}=D(z_i,{}^{r_i}/_2)$. Soit $g(z)=\sum_i\lambda_i\chi_i(z)$. Le Théorème de Weierstrass nous donne l'existence d'une fonction $F\in H(\Omega)$ ayant un zéro d'ordre m_i en chaque point z_i, ne s'annulant pas ailleurs, et un pôle d'ordre n_j en chaque point ζ_j. Alors si on définit la fonction ω par

$$\omega(z)=\begin{cases}\frac{1}{F(z)}\frac{\partial g}{\partial\bar z}(z) & \text{si } z\in\Omega\setminus\left(\bigcup_i\widetilde{D_i}\right)\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

cette fonction est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω, et, d'après le Théorème IV.2.1, il existe une fonction $R\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial R}{\partial\bar z}=\omega$. Si on pose alors

$$f_1(z)=g(z)-F(z)R(z),$$

la fonction f_1 ainsi définie est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω, $\frac{\partial f_1}{\partial\bar z}=\frac{\partial g}{\partial\bar z}-F\frac{\partial R}{\partial\bar z}=0$ et, dans $\widetilde{D_i}$, on a $f_1=\lambda_i-FR$. Comme F s'annule à l'ordre m_i au point z_i, $f_1-\lambda_i$ s'annule à un ordre plus grand en ce point. De plus, g est nulle au voisinage de chaque ζ_j. Pour conclure, on remarque que, d'après ce que l'on vient de démontrer, il existe une fonction h holomorphe dans Ω qui vaut $1-R(z_i)$ en chaque point z_i et $1-R(\zeta_j)$ en chaque point ζ_j, et la fonction cherchée est $f=g-F(R+h)$, puisque $R+h$ vaut 1 aux points z_i et aux points ζ_j. □

On remarquera que la principale différence entre les deux précédents Théorèmes est que, dans le second, on ne dit rien sur les points qui ne sont pas dans $S\cup\Sigma$.

Nous allons donner deux démonstrations du Théorème de Weierstrass. La première est une application de la résolution des équations de Cauchy-Riemann donnée à la Section précédente. La seconde, plus classique et plus constructive, traitera, plus généralement, les fonctions définies sur la sphère de Riemann. Elle est basée sur les facteurs élémentaires de Weierstrass et utilise la théorie des produits infinis de fonctions holomorphes que nous rappellerons avant de donner cette démonstration.

IV.3.1 Première démonstration du Théorème de Weierstrass

Lemme. *Dans les conditions du Théorème IV.3.1 il existe une suite de chemins continus injectifs $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}_*}$, paramétrés par $[0,1]$, tels que, $\forall j \geq 1$, $\gamma_j(0) = z_j$ et soit $\gamma_j(1) \in \partial\Omega$ soit $\lim_{t\to 1}|\gamma_j(t)| = +\infty$ et, pour $j \neq k$, $\gamma_j([0,1]) \cap \gamma_k([0,1]) = \emptyset$.*

Démonstration. Pour tout entier k on pose $\Omega_k = \Omega \cap D(0,k)$ ($D(0,k)$ étant le disque centré à l'origine et de rayon k) et $E_k = \{z \in \Omega_k$ tels que $\mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega_k \geq 1/2k\}$. On construit les chemins γ_j par récurrence à partir de certains points de $S = \{z_j,\, j \in \mathbb{N}_*\}$.

Soit $S_1 = S \cap \Omega_1 \cap E_1$. Par hypothèse sur S, S_1 est un ensemble fini et on peut donc joindre chaque point de S_1 au bord de $\Omega_1 \cap E_1$ par des chemins continus injectifs deux à deux disjoints de sorte que les extrémités de ces chemins ne soient pas dans S et on note $\widetilde{S_1}$ l'ensemble des extrémités de ces chemins. Supposons les ensembles S_j et $\widetilde{S_j}$ et les chemins associés construits jusqu'au rang k. Soit $S_{k+1} = \widetilde{S_k} \cup (S \cap \Omega_{k+1} \cap E_{k+1}) \setminus \left(\bigcup_{j\leq k} S_k\right)$. Comme S_{k+1} est fini, on peut joindre les points de S_{k+1} par des chemins continus injectifs deux à deux disjoints contenus dans $E_k \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega_k)$ au bord de $\Omega_{k+1} \cap E_{k+1}$ de sorte que les extrémités ne soient pas dans S. Comme ces chemins ne peuvent pas rencontrer les chemins précédemment construits, la récurrence peut se poursuivre et le Lemme s'en déduit. □

Démonstration du Théorème IV.3.1. Les chemins γ_j étant continus injectifs et deux à deux disjoints, pour chaque $j \geq 1$, on peut trouver des voisinages ouverts V_j et W_j de $\mathrm{Im}\gamma_j$ possédant les propriétés suivantes :

1. pour $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$;
2. pour tout $i \geq 1$, $W_i \subset V_i$
3. Si l'extrémité de γ_i est dans $\partial\Omega$, pour $\varepsilon > 0$, $W_i \cap \{z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \varepsilon\}$ est relativement compact dans V_i sinon, pour tout entier positif N, $W_i \cap \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq N\}$ est relativement compact dans V_i ;
4. pour tout $i \geq 1$, $V_i \setminus W_i$ est simplement connexe.

Il est alors clair que, pour chaque i, il existe alors une fonction χ_i de classe $\mathscr{C}^\infty$, $0 \leq \chi_i \leq 1$, valant identiquement 1 sur un voisinage de $\overline{W_i}$ et telle que, si l'extrémité de γ_i est dans $\partial\Omega$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Supp}\chi_i \cap \{z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \varepsilon\}$ est relativement compact dans V_i et, sinon, pour tout entier positif N, $\mathrm{Supp}\chi_i \cap \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq N\}$ est relativement compact dans V_i.

Comme $V_i \setminus W_i$ est simplement connexe il existe une détermination continue de $\log(z - z_i)$ dans cet ouvert et on pose

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_i)^{n_i} & \text{dans } W_i \setminus \{z_i\}, \\ \exp(\chi_i(z) n_i \log(z - z_i)) & \text{dans } V_i \setminus W_i, \\ 1 & \text{dans } \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_i V_i\right). \end{cases}$$

Clairement la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\Omega \setminus S$ et ne s'annule pas. Comme cette fonction g possède les propriétés de singularités locales requises pour la fonction f du Théorème, pour conclure, il suffit de montrer qu'il existe une fonction $R \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que la fonction f définie par

$$z \mapsto f(z) = g(z) e^{-R(z)},\, z \in \Omega \setminus S$$

soit méromorphe dans Ω (puisque la fonction e^{-R} est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω et ne s'annule pas).

Pour cela considérons la fonction

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \left(\bigcup_j W_j\right), \\ 0 & \text{si } z \in \bigcup_j W_j. \end{cases}$$

Comme χ_j vaut identiquement 1 sur un voisinage de $\overline{W_j}$, cette fonction est $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω. Le Théorème IV.2.1 entraîne alors qu'il existe une fonction $R \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \omega$ ce qui donne, avec $f(z) = g(z)e^{-R(z)}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = e^{-R(z)} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) - g(z) \frac{\partial R}{\partial \bar{z}}(z) \right) = 0,\, z \in \Omega \setminus S.$$

Comme, par construction, $f(z)(z - z_i)^{-n_i} = e^{-R(z)}$ dans un voisinage de z_i privé de z_i, la démonstration est achevée. □

IV.3.2 Produits infinis de fonctions holomorphes

Nous rappelons tout d'abord les propriétés de base des produits infinis :

PROPOSITION IV.3.1.

Soit X un ensemble. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions bornées, $u_n : X \to \mathbb{C}$, telles que la série $\sum_n \|u_n\|_\infty$ soit convergente (où on a noté $\|u_n\|_\infty = \sup_X |u_n(x)|$). Alors le produit infini $\prod_{n=1}^\infty (1+u_n(x))$ converge uniformément sur X vers une fonction f et $f(x_0) = 0$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(x_0) = -1$. De plus, si $k \mapsto n_k$ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\prod_{k=1}^\infty \left(1+u_{n_k}(x)\right)$ converge uniformément sur X vers f.

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}_*$, posons $f_N(x) = \prod_{n=1}^N (1+u_n(x))$. Comme $1+x \leq e^x$, pour $x \geq 0$, on a $|f_N(x)| \leq e^{\sum_{n=1}^N |u_n(x)|}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_N(x)| \leq C$, $\forall N \in \mathbb{N}_*$, $\forall x \in X$. De même, et avec les notations de l'énoncé, posons $g_N(x) = \prod_{k=1}^N \left(1+u_{n_k}(x)\right)$.

Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, soit $N_\varepsilon$un entier tel que $\sum_{n=N_\varepsilon}^\infty \|u_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Si $N \geq N_\varepsilon$ et si M est un entier tel que $\{1,\dots,N\} \subset \{n_1,\dots,n_M\}$ alors

$$g_M(x) - f_N(x) = f_N(x)\left[\prod \left(1+u_{n_k}(x)\right) - 1\right]$$

où la produit porte sur un ensemble fini d'entiers $n_k > N_\varepsilon$.

Lemme. *Dans la formule ci-dessus on a*

$$\left|\prod \left(1+u_{n_k}(x)\right) - 1\right| \leq \prod \left(1+\left|u_{n_k}(x)\right|\right) - 1.$$

Démonstration. Cette inégalité résulte du fait que si $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes alors

$$\left|\prod_{n=1}^m (1+a_n) - 1\right| \leq \prod_{n=1}^m (1+|a_n|) - 1.$$

Cette dernière inégalité se démontre par récurrence sur m : elle est claire pour $m = 1$, et, par récurrence on a

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{n=1}^{m+1} (1+a_n) - 1\right| &= \left|\prod_{n=1}^{n} (1+a_n)\left[(1+a_{m+1}) - 1\right]\right| \\
&= \left|\left[\prod_{n=1}^{m} (1+a_n) - 1\right][1+a_{m+1}] + a_{m+1}\right| \\
&\leq \left[\prod_{n=1}^{m} (1+|a_n|) - 1\right][1+|a_{m+1}|] + |a_{m+1}| \\
&= \prod_{n=1}^{m} (1+|a_n|) - 1.
\end{aligned}$$

□

Fin de la démonstration de la Proposition. Le Lemme donne

$$\left|\prod \left(1+u_{n_k}(x)\right) - 1\right| \leq \prod \left(1+\left|u_{n_k}(x)\right|\right) - 1 \leq e^{\sum_{N_\varepsilon}^\infty |u_n(x)|} \leq e^\varepsilon - 1 \leq 2\varepsilon$$

et, par suite,

$$|g_M(x) - f_N(x)| \leq 2\varepsilon\,|f_N(x)| \leq 2C\varepsilon.$$

Appliquée à la suite d'entiers $n_k = k$ cette inégalité montre que le produit infini $\prod(1+u_n)$ est de Cauchy pour la convergente uniforme et converge donc vers une fonction f et elle montre aussi que le produit infini $\prod\left(1+u_{n_k}\right)$ converge aussi uniformément vers f. De plus appliquée à la suite $n_k = k$ et $N = N_\varepsilon$, elle donne, pour $M \geq N_\varepsilon$, $|f_M(x)| \geq (1-2\varepsilon)\,|f_{N_\varepsilon}(x)|$ d'où on déduit $|f(x)| \geq (1-2\varepsilon)\,|f_{N_\varepsilon}(x)|$ ce qui montre que $f(x_0) = 0$ implique $f_{N_\varepsilon}(x_0) = 0$ ce qui entraîne l'existence d'un entier n tel que $u_n(x_0) = -1$. □

PROPOSITION IV.3.2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction holomorphes dans Ω chacune non identiquement nulle dans une composante connexe de Ω. On suppose que la série $\sum_{n=1}^\infty |1-f_n|$ est uniformément convergente sur les compacts de Ω. Alors :

1. *Le produit infini $\prod_{n=1}^\infty f_n$ est uniformément convergeant sur les compacts de Ω vers une fonction $f \in H(\Omega)$.*
2. *Pour tout $z \in \Omega$ et toute $g \in H(\Omega)$, notons*

$$m_g(z) = \begin{cases} 0 & \textit{si } g(z) \neq 0, \\ \textit{l'ordre de } z \textit{ comme zéro de } g & \textit{si } g(z) = 0. \end{cases}$$

Alors $m_f(z) = \sum_{n=1}^\infty m_{f_n}(z)$.

Démonstration. Le 1. n'est autre que la Proposition précédente. De plus l'hypothèse implique que, pour $z \in \Omega$, dans un voisinage V de z, seul un nombre fini de fonction f_n s'annulent. La Proposition précédente entraîne donc que le produit des autres fonctions ne s'annule pas dans V ce qui donne le 2. □

IV.3.3 *Les facteurs élémentaires de Weierstrass*

DÉFINITION IV.3.1.
On appelle **facteurs élémentaires de Weierstrass** les fonctions entières E_p (i.e. holomorphes dans $\mathbb{C}$) définies par

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1-z \\ E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right),\ p\in\mathbb{N}_*. \end{aligned}$$

Il est clair que $E_p(z)=0$ si et seulement si $z=1$.

Lemme IV.3.1. *Pour tout entier p et tout nombre complexe z, $|z|\leq 1$, on a $\left|1-E_p(z)\right|\leq |z|^{p+1}$.*

Démonstration. C'est évident pour $p=0$. Supposons donc $p\geq 1$. Posons $f_p(z)=z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}$ de sorte que $E_p(z)=(1-z)\,e^{f_p(z)}$. Il vient donc $E_p'(z)=-z^p e^{f_p(z)}$. Ainsi $-E_p'(z)$ a un zéro d'ordre p à l'origine et le développement en série entière de $-E_p'$ en 0 a tous ses coefficients positifs. Comme $1-E_p(z)=-\int_{[0,z]}E_p'(w)\,dw$ (où $[0,z]$ désigne le segment d'origine 0 et d'extrémité z), $1-E_p$ a un zéro d'ordre $p+1$ à l'origine, et si on pose $\varphi(z)=\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$, on a $\varphi(z)=\sum a_n z^n$ où les a_n sont tous positifs. Par suite $|\varphi(z)|\leq\varphi(1)=1$ si $|z|\leq 1$. □

PROPOSITION IV.3.3.
Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{C}_*$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to+\infty}|z_n|=+\infty$. Si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'entiers telle que, pour tout $r>0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}$ converge, alors le produit infini

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

défini une fonction entière P dont les zéros sont exactement les points z_n. De plus, si α est un zéro de P son ordre est égal au nombre de points z_n égaux à α.

Remarque. Compte tenu de l'hypothèse faite sur la suite $(z_n)_n$, il existe toujours une suite d'entiers $(p_n)_n$ qui satisfait l'hypothèse de l'énoncé. Par exemple, $p_n=n-1$ convient toujours puisque, si $|z_n|>2r$, on a $\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}\leq\frac{1}{2^n}$.

Démonstration. Pour $|z|\leq r\leq|z_n|$, le Lemme IV.3.1 donne $\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\leq\left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n}\leq\left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}$ et l'hypothèse montre que la série $\sum\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ est uniformément convergente sur les compacts de $\mathbb{C}$. La Proposition IV.3.2 montre donc que le produit infini $\prod E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ et que P s'annule en un point si et seulement si l'un des $E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ s'annule en ce point c'est-à-dire si et seulement ce point est l'un des z_n. □

Exemple.

1. Si $\sum\frac{1}{|z_n|}<+\infty$, on peut prendre $p_n=0$ pour tout n, ce qui donne $P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$.
2. Si $\sum\frac{1}{|z_n|^2}<+\infty$ et $\sum\frac{1}{|z_n|}=+\infty$, on peut prendre $p_n=1$ pour tout n, ce qui donne $P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}$.

THÉORÈME IV.3.3.
Soit f une fonction entière ne s'annulant pas à l'origine. Soit $(z_n)_n$ la suite des zéros de f listés selon leur multiplicités (i.e. chaque zéro étant répété un nombre de fois égal à sa multiplicité). Alors il existe une fonction entière g et une suite d'entiers positifs ou nuls $(p_n)_n$ tels que

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Remarque.

1. Si 0 est un zéro d'ordre k de f, on peut appliquer le Théorème à la fonction $\frac{f(z)}{z^k}$.
2. La factorisation de Théorème n'est bien sûr pas unique puisque l'on peut choisir différentes suites $(p_n)_n$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition précédente et de la Proposition II.1.1. □

IV.3.4 *La sphère de Riemann*

DÉFINITION IV.3.2.
On appelle **sphère de Riemann** le compactifié d'Alexandrov S^2 de $\mathbb{C}$ c'est-à-dire l'espace topologique compact $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ obtenu en rajoutant un point (∞), dit point à l'infini, muni de la topologie dont, pour chaque point, une base de voisinages est formée par les « boules » $B(x,r)$, $0 \leq r < +\infty$, définies par :

1. si $x \in \mathbb{C}$, $B(x,r)$, $r > 0$, est le disque usuel dans $\mathbb{C}$,
2. si $x = \infty$, $B(\infty,r) = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| > 1/r\} \cup \{\infty\}$, $z > 0$.

Cette Définition montre que les ouverts de la topologie de S^2 sont les ouverts de $\mathbb{C}$ et les réunions d'un ouvert de $\mathbb{C}$ et d'un complémentaire d'un compact de $\mathbb{C}$. On vérifie alors sans difficulté que ces ensembles définissent bien une topologie sur S^2 (i.e. toute réunion d'ouverts est un ouvert) et que, muni de cette topologie S^2 est compact. De plus, comme cette topologie admet clairement une base dénombrable d'ouverts (les « boules » de rayons rationnels centrées en des points de $\mathbb{C}$ de coordonnées rationnelles ou à l'infini) elle est métrisable (i.e. S^2 est un espace métrique compact). Dans la suite, pour des raisons de cohérence terminologique, par abus de language, ces « boules » seront appelées des disques et seront notés $D(z,r)$ (même pour $z = \infty$).

Il est facile de vérifier que l'espace S^2 ainsi défini est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ par l'homéomorphisme φ défini par : $\varphi(\infty) = (0,0,1)$, et, pour $re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$,

$$\varphi\left(re^{i\vartheta}\right) = \left(\frac{2r\cos\vartheta}{r^2+1}, \frac{2r\sin\vartheta}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right).$$

DÉFINITION IV.3.3.
Soit Ω un ouvert de S^2. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to S^2$ est holomorphe si, pour tout point $z \in \Omega$, on a :

1. Si $z \in \mathbb{C}$ et si le disque $D(z,r)$, $0 < r < +\infty$, est contenu dans Ω (donc dans $\mathbb{C}$), f est holomorphe dans $D(z,r) \setminus \{z\}$ et $\zeta \mapsto f(\zeta)$ a une limite dans S^2 (éventuellement ∞) égale à $f(z)$ quand ζ tends vers z ;
2. Si $z = \infty$ et si le disque $D(\infty,r)$, $0 < r < +\infty$, est contenu dans Ω (i.e. $D(\infty,r) = \{|z| > 1/r\} \cup \{\infty\} \subset \Omega$), la fonction $z \mapsto f(z)$ est holomorphe dans $D(\infty,r) \setminus \{\infty\}$ et a une limite dans S^2 quand $|z| \to +\infty$ égale à $f(\infty)$.

Cette Définition mérite que l'on s'y attarde un peu.

Considérons tout d'abord le premier cas de la Définition.

– Si $f(z) = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\neq z}} f(\zeta) \in \mathbb{C}$, alors f est bornée au voisinage de z et est donc holomorphe au sens usuel en z (Proposition II.2.4).
– Si $f(z) = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\neq z}} f(\zeta) = \infty$, alors f est non bornée au voisinage de z, et, d'après la Proposition II.2.5, soit f est méromorphe en z soit z est une singularité essentielle pour f. Mais le second cas n'est pas possible, car, le 3. de la Proposition II.2.5 dit que dans ce cas, pour tout $r > 0$ l'image par f de $D(z,r) \setminus \{z\}$ ne peut pas être contenue dans un voisinage de ∞. Ainsi, si f n'est pas bornée en z elle est méromorphe en ce point.

En résumé, dans le cas 1. de la Définition, soit f est holomorphe au sens usuel en z soit f a un pôle en z : une fonction holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans S^2 est une fonction méromorphe.

Considérons maintenant le cas 2.

– Soit $\varphi : z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ est bornée au voisinage de 0 et elle est donc holomorphe en 0 (Proposition II.2.4) et $\zeta \mapsto f(\zeta)$ a une limite dans $\mathbb{C}$ (qui est $f(\infty)$) quand ζ tends vers ∞. De plus, si λ est la limite de f à l'infini, le développement de Laurent de f dans $\{|z| > 1/r\}$s'écrit $f(z) = \lambda + \sum_{-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n} + \sum_1^{+\infty} a_n z^n$, la première somme convergeant uniformément vers 0 quand $|z|$ tends vers $+\infty$ et la seconde étant une fonction entière qui tends vers 0 quand $|z|$ tends vers $+\infty$. Par le Théorème de Liouville (Corollaire 1 de la Proposition II.2.6) cette seconde somme est donc nulle. Ainsi, $f(z) = \lambda + \sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}$, la série convergeant uniformément dans un disque $\{|z| > R\}$, R assez grand.
– Soit $\varphi : z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ est non bornée au voisinage de 0. Alors φ ne peut pas avoir de singularité essentielle à l'origine, car, si elle en avait une, la Proposition II.2.5 impliquerait que, pour tout $R > 0$ assez grand, $f(\{|z| > R\})$ serait dense dans $\mathbb{C}$ et f n'aurait pas de limite quand $\zeta \to \infty$. Ainsi φ est méromorphe en 0 et f est la somme d'un polynôme P et d'une fonction h holomorphe au voisinage de ∞ au sens du cas précédent, et $f(\zeta)$ tends vers $f(\infty) = \infty$ quand ζ tends vers ∞. On écrit alors $f(\infty) = \infty$ et on dit parfois que f est méromorphe en ∞ (pour distinguer du cas précédent) d'ordre le degré de P.

En résumé, dans le cas 2. de la Définition, soit f a une limite dans $\mathbb{C}$ quand $\zeta \to \infty$ soit f s'écrit $f = P + h$ où P est un polynôme holomorphe et g une fonction holomorphe dans Ω qui a une limite dans $\mathbb{C}$ quand $\zeta \to \infty$.

On notera que si $\infty \in \Omega$, si f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{\infty\}$ et si f ne se prolonge pas holomorphiquement en ∞ (i.e. n'a pas de limite dans S^2 quand $\zeta \to \infty$) cela signifie que $\varphi : z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ a une singularité essentielle en 0 et on dit alors que f a une singularité essentielle en ∞.

En conclusion, si f est holomorphe sur un ouvert Ω de S^2 et si $z \in \Omega$, quand $\zeta \to z$, soit f a une limite dans $\mathbb{C}$ soit, ou bien $z \in \mathbb{C}$ et f est méromorphe en z, ou bien $z = \infty$ et f s'écrit, au voisinage de ∞, $P + h$ où P est un polynôme et h une fonction holomorphe au voisinage de ∞ ayant une limite dans $\mathbb{C}$ en ∞. De plus nous dirons qu'une fonction holomorphe sur un ouvert de S^2 est **finie** si elle ne prends jamais la valeur ∞ (par exemple, une fonction méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est finie si elle est en fait holomorphe au sens des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$).

Le raisonnement fait au second point du cas 2 ci-dessus montre, par exemple, que si $f : S^2 \to S^2$ est holomorphe alors c'est un polynôme : une fonction entière non polynômiale ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe sur S^2.

Un exemple utile de fonction holomorphes sur S^2 est donné par les transformations homographiques (nous y reviendrons au Chapitre suivant) c'est-à-dire les transformations de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

où a, b, c et d sont dans $\mathbb{C}$. Ces fonction sont clairement holomorphes sur S^2, elles sont bijectives si $ad - bc \neq 0$ (l'inverse de $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$), $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ envoie ∞ sur $\frac{a}{c} \in \mathbb{C}$ et $-\frac{d}{c}$ sur ∞ ($ad - bc \neq 0$).

Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si $z_0 \in \Omega$ alors, en notant $\varphi(z) = \frac{az+b}{z-z_0}$, $az_0 + b \neq 0$, la fonction $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe sur un ouvert de S^2 contenant ∞ et vaut $f(z_0)$ en ∞.

IV.3.5 *Seconde démonstration du Théorème de Weierstrass*

THÉORÈME IV.3.4 (Théorème de Weierstrass).

Soit Ω un ouvert de la sphère de Riemann S^2, $\Omega \neq S^2$. Soit $A \subset \Omega$ un sous-ensemble discret. Pour tout $a \in A$ soit $m(a) \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Alors il existe une fonction $f : \Omega \to S^2$ holomorphe (i.e. méromorphe) qui ne s'annule pas et est bornée en tout point n'appartenant pas à A et telle que, en tout point a de A $z \mapsto (z-a)^{-m(a)} f(z)$ est holomorphe bornée et ne s'annule pas dans un voisinage de a.

Démonstration. En utilisant une transformation homographique convenable, on se ramène au cas où $\infty \in \Omega$ de sorte que $S^2 \setminus \Omega$ est un compact non vide ($\Omega \neq S^2$) de $\mathbb{C}$. De plus, à l'aide d'une autre transformation homographique, on se ramène ensuite au cas où $\infty \notin A$.

Considérons tout d'abord le cas où $m(a) \geq 0$ pour tout $a \in A$. Si A est fini on prends simplement

$$f(z) = \frac{\prod_{a\in A} (z-a)^{m(a)}}{(z-b)^{\sum_{a\in A} m(a)}}$$

avec $b \in S^2 \setminus \Omega$. Supposons donc A infini. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite formée des points a de A chacun répété $m(a)$ fois. Comme $S^2 \setminus \Omega$ est compact, pour tout $n \geq 1$ il existe $\beta_n \in S^2 \setminus \Omega$ tel que $|\beta_n - \alpha_n| \leq |\beta - \alpha_n|$, $\forall \beta \in S^2 \setminus \Omega$ et, comme A est sans point d'accumulation dans Ω, on a $\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0$. On considère alors le produit de facteurs élémentaires de Weierstrass

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right).$$

Si K est un compact de $\Omega \cap \mathbb{C}$ et $r_n = 2|\alpha_n - \beta_n|$, pour $z \in K$ on a $|z - \beta_n| \geq \varepsilon > 0$, et il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $|z - \beta_n| \geq r_n$, donc $\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right| \leq 1/2$, d'où (Lemme IV.3.1) $\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right| \leq (1/2)^{n+1}$, ce qui montre (Proposition IV.3.2) que le produit infini ci-dessus converge uniformément sur K vers une limite finie. Enfin, comme $\{|\alpha_n - \beta_n|, n \geq 1\}$ est borné et que $\beta_n \in K$, pour $|z| \geq R$ on a aussi $\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right| \leq 1/2$ ce qui montre que le produit infini converge uniformément sur $\{|z| \geq R\}$ et $f(\infty) = 1$. Ceci termine la démonstration dans le cas $m(a) \geq 0$, $\forall a \in A$.

Considérons maintenant le cas général $m(a) \in \mathbb{Z}$. Séparons A en deux sous ensembles $A_+ = \{a \in A \text{ tels que } m(a) \geq 0\}$ et $A_- = A \setminus A_+$. La première partie de la preuve montre que l'on peut construire deux fonction f_+ et f_- holomorphes dans Ω associées à A_+ et A_- comme il est dit dans l'énoncé. Alors la fonction $f = f_+/f_-$ est clairement la fonction cherchée. □

Le Corolaire qui suit est une conséquence immédiate du Théorème précédent :

COROLLAIRE.

Toute fonction méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ s'écrit comme quotient de deux fonction holomorphes.

Exercices

EXERCICE IV.1 (théorème de Runge).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire n'a pas de composante connexe bornée. Montrer que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions holomorphes sur Ω (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

EXERCICE IV.2 (théorème de Runge).
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $A = \{a_k\}$ une collection de points dans $\mathbb{C}$, la règle étant qu'il existe un et un seul point de A dans chaque composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Montrer que toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles dans A.

EXERCICE IV.3 (enveloppe d'holomorphie).
Donner un exemple d'un compact K et de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 contenant tous les deux K et tels que les enveloppes d'holomorphie $\widehat{K}_{\Omega_1}$ et $\widehat{K}_{\Omega_2}$ diffèrent.

EXERCICE IV.4 (théorème de Runge (mais aussi formule de Cauchy)).
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe au voisinage de K. En utilisant le théorème de Runge, montrer que f s'approche uniformément sur K par des fractions rationnelles à pôles simples, tous dans $\mathbb{C} \setminus K$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Cauchy : montrer pour cela qu'étant donné un ouvert Ω contenant K, il existe un nombre fini N de courbes de Jordan (polygonales) de support dans Ω telles que K soit dans l'union des ouverts qu'elles enserrent.

EXERCICE IV.5 (élémentaire).
Montrer élémentairement que la fonction $z \mapsto 1/z$ ne peut être limite uniforme de polynômes dans l'anneau $\{1 \leq |z| \leq 2\}$. Cela est-il bien en concordance avec le théorème de Runge ?

EXERCICE IV.6 (Autour du théorème de Runge).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < b_n < a_n < n$. Montrer qu'il existe un polynôme p_n tel que $|p_n(z)| \geq n$ si $\mathrm{Im}\, z = b_n$ et $z \in \overline{B(0,n)}$, et $|p_n(z)| \leq 1/n$ pour $z \in \overline{B(0,n)}$ et soit $\mathrm{Im}\, z \leq 0$, soit $\mathrm{Im}\, z \geq a_n$.
2. Déduire du 1. l'existence d'une suite de polynômes $(p_n)_n$ convergeant simplement vers la fonction nulle, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais non uniforme au voisinage d'aucun point de l'axe réel.
3. Construire une suite de polynômes convergeant simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et vers 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

EXERCICE IV.7 (Runge et dualité).
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de mesure nulle. Montrer que les fractions rationnelles à pôles hors de K sont denses dans $C(K)$.

EXERCICE IV.8 (Runge et dualité).
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe et K de mesure nulle. Montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans $C(K)$. Que retrouve-t-on si K est un intervalle de $\mathbb{R}$?

EXERCICE IV.9 (Runge et enveloppe d'holomorphie).
Prouver que les items suivants sont équivalents, étant donnés deux ouverts $\Omega_1 \subset \Omega_2$ de $\mathbb{C}$.

Toute fonction holomorphe dans Ω_1 est limite uniforme sur tout compact d'une suite de restrictions à Ω_1 de fonctions holomorphes sur Ω_2.
Si $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = K \cup F$ avec K compact, F fermé dans Ω_2 et $K \cap F = \emptyset$, alors $K = \emptyset$.
Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.
Pour tout compact K de Ω_1, $\widehat{K}_{\Omega_1} = \Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$.
Pour tout compact K de Ω_1, $\Omega_1 \cap \widehat{K}_{\Omega_2}$ est aussi un compact de Ω_1.

EXERCICE IV.10 (Résolution de $\overline{\partial} u = f$).
Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert $D(0,1)$ du plan complexe, sans zéro commun dans ce disque.

1. Construire deux fonctions g_1 et g_2 de classe C^∞ dans $D(0,1)$ telles que $1 \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2$ dans $D(0,1)$.
2. Déterminer tous les couples de fonctions (v_1, v_2) de classe C^∞ dans $D(0,1)$ tels que l'on ait l'identité $f_1 v_1 + f_2 v_2 \equiv 0$ dans $D(0,1)$.

3. **(c)** En utilisant la surjectivité de l'opérateur de Cauchy-Riemann de $C^\infty(D(0,1))$ dans lui-même, montrer qu'en «corrigeant» judicieusement le couple (f_1, f_2) construit au 1., on peut trouver deux fonctions h_1 et h_2 holomorphes dans $D(0,1)$ telles que $f_1h_1 + f_2h_2 \equiv 1$ dans $D(0,1)$.

EXERCICE IV.11 (Généralisation à n fonctions : identité de Bezout).
Soit Ω un ouvert du plan complexe. Soient f_i, $1 \leq i \leq n$, des fonctions holomorphes dans Ω telles que la fonction $|f|^2 := \sum_{i=1}^n |f_i|^2$ ne s'annule pas dans Ω. On se propose de montrer qu'il existe des fonctions g_i, $1 \leq i \leq n$, holomorphes dans Ω telles que $\sum_{i=1}^n f_i g_i \equiv 1$ (Identité de Bezout).

1. Soient $\varphi_i = \frac{\overline{f_i}}{|f|^2}$, $1 \leq i \leq n$. Vérifier que les fonctions φ_i sont $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω et que $\sum_{i=1}^n f_i\varphi_i \equiv 1$.
2. Pour tous i, j on pose $m_{ij} = \frac{1}{|f|^2}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}}\overline{f_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{z}}\overline{f_j}\right]$. Montrer qu'il existe des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dans Ω, n_{ij}, telles que $\frac{\partial n_{ij}}{\partial \bar{z}} = m_{ij}$ vérifiant $n_{ji} = -n_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.
3. Pour tout i, on pose $h_i = \sum_{j=1}^n n_{ij} f_j$. Montrer que $\varphi_i + h_i$ est holomorphe dans Ω et que $\sum_{i=1}^n h_i f_i \equiv 0$.
4. Conclure.

EXERCICE IV.12 (produits infinis).
Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers : $2, 3, 5, \ldots$.

1. Prouver, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement supérieure à 1, la convergence du produit infini
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$
Pourquoi ce produit définit-il une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 1\}$?
2. Vérifier, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 1$, l'*identité d'Euler* :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^z}}.$$

EXERCICE IV.13 (produits infinis).
Prouver la convergence, pour tout $z \in D(0,1)$, du produit infini
$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}).$$
Pourquoi ce produit infini définit-il une fonction holomorphe dans le disque unité ? Vérifier la formule
$$\forall z \in D(0,1), \ \frac{1}{1-z} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}).$$

EXERCICE IV.14 (produits infinis, facteurs de Weierstrass).

1. Montrer que l'on définit bien une fonction entière en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$
Calculer la fonction méromorphe F'/F (sous forme d'un développement en série de fonctions méromorphes uniformément convergent sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$).
2. Si N est un entier strictement positif et z un nombre complexe de module strictement inférieur à $N + 1/2$, calculer grâce à la formule des résidus
$$I_N(z) := \int_{\gamma_{N+1/2}} \frac{\operatorname{cotan} \pi\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta$$
si $\gamma_{N+1/2} : t \in [0,1] \mapsto (N+1/2)e^{2i\pi t}$.
3. Quelle est la limite de $I_N(z)$ lorsque N tend vers $+\infty$? En déduire la formule
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

4. En utilisant convenablement la formule trigonométrique de duplication pour le sinus, montrer que l'on a aussi l'autre factorisation
$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{\pi z}{2^n}\Big).$$

EXERCICE IV.15 (produits infinis, facteurs de Weierstrass).

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction méromorphe
$$f_n(z) := \frac{n}{n+z}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^z.$$
Montrer que le produit infini
$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$
est uniformément convergent sur tout compact de $U := \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$ et définit une fonction Φ méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles les entiers strictement négatifs.
2. Montrer que, pour tout z tel que $z-1 \in U$,
$$\Phi(z-1) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N!N^z}{z(z+1)\cdots(z+N)}.$$
3. Vérifier, pour tout z de partie réelle strictement positive, la formule
$$\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt = \lim_{N\to+\infty} \frac{N!N^z}{z(z+1)\dots(z+N)}$$
(*utiliser pour cela le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que* e^{-t} *est, pour tout* $t>0$, *la limite lorsque* N *tend vers* $+\infty$ *de* $(1-t/N)^N\chi_{[0,N]}(t)$).
4. Montrer que la fonction
$$z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\} \mapsto \Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$$
se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe et que ce prolongement coincide avec la fonction $z \mapsto \Phi(z-1)$.
5. En déduire que Γ ne s'annule pas dans $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, que $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière F, et que l'on a
$$F(z) = ze^{\gamma z}\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n},$$
où
$$\gamma := \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \log N\Big) \tag{IV.3}$$
désigne la *constante d'Euler* (on montrera l'existence de la limite (IV.3)).
6. En utilisant le théorème de convergence dominée et le développement
$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \quad \forall t \in]0,\infty[,$$
démontrer[1], pour tout z tel que $\mathrm{Re}\, z > 1$, l'identité
$$\Gamma(z)\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z} = \int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt.$$
7. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \in [1,\infty[\mapsto t^{z-1}/(e^t-1)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[1,\infty[$ et que la fonction
$$E\ : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt$$
est une fonction entière (on utilisera les théorèmes de Morera et de Fubini).

[1] Voir aussi l'Exercice II.40.

8. Si les B_k, $k \in \mathbb{N}$, désignent les coefficients de Taylor du développement au voisinage de l'origine de

$$z \mapsto \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k$$

(voir l'exercice 3.6), montrer que l'on définit une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, de pôles $0, -1, -2, \ldots$ en posant

$$M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{z+k-1} \ z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Vérifier que l'on a, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 1$,

$$M(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \int_0^1 t^{z-2} \frac{t}{e^t - 1}\, dt.$$

9. Déduire en utilisant les résultats établis aux questions 5. à 8. que la fonction ζ définie dans $\{z;\ \operatorname{Re} z > 1\}$ par

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe et de la forme

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + H(z),$$

où $H(z)$ est une fonction entière.

EXERCICE IV.16 (théorème de Weierstrass dans $\mathbb{C}^*$).

1. Montrer qu'il existe une fonction entière F telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z+1) = F(z)$$

et qui s'annule en tous les zéros de $z \mapsto e^z - 1$.

2. Montrer en revanche que si P est un polynôme à coefficients complexes, de zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, supposés tous simples, la seule fonction entière F telle que $P(d/dz)[F] \equiv 0$ et $F(\overline{\alpha_j}) = 0$, $j = 1, \ldots, d$, est la fonction identiquement nulle [2].

EXERCICE IV.17 (Produits de Blaschke et formule de Jensen).

Dans ce problème on note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe et, pour $r > 0$, $D_r = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < r\}$ le disque ouvert de centre l'origine et de rayon r.

1. Soient α un nombre complexe de module < 1 et $r \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a $\left|\frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \frac{|\alpha|}{\alpha}\right| \leq 1$ (calculer ce module sur le bord de $\mathbb{D}$). Montrer de plus que, pour $|z| \leq r$, $\left|1 - \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \frac{|\alpha|}{\alpha}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}(1 - |\alpha|)$.

2. Soient $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite de nombres complexes de modules < 1, sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, $m = (m_n)_n$ une suite d'entiers positifs non nuls et k un entier positif.
   (a) Déduire de la question précédente que si la série $\sum_n m_n (1 - |\alpha_n|)$ est convergente le produit infini

   $$B_{\alpha,m,k}(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right)^{m_n}$$

   converge uniformément sur le disque D_r, pour $0 \leq r < 1$.
   (b) En déduire que $B_{\alpha,m,k}$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $\left|B_{\alpha,m,k}(z)\right| \leq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$ et dont les zéros sont exactement 0 et les points de la suite α, l'ordre de α_n étant m_n.

3. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{D}$, $|\alpha| < r < 1$. En remarquant que $\left|\frac{r^2 - \bar{\alpha} z}{r(\alpha - z)}\right| = 1$ si $|z| = r$ et que la fonction $z \to (z - \alpha) \frac{r^2 - \bar{\alpha} z}{r(\alpha - z)}$ est holomorphe au voisinage du disque fermé $\{|z| \leq r\}$ et ne s'annule pas, montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|re^{it} - \alpha\right| dt = \log r$.
   (b) Soient f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $f(0) \neq 0$ et $r < 1$. Soient α_1, α_2,... les zéros de f (deux à deux distincts et rangés par modules croissants), et, pout tout i, soient m_i la multiplicité de α_i et $r_i = |\alpha_i|$. De plus on note $A = \{r_i, i \in \mathbb{N}_*\}$.

[2] L'opérateur $H(D)$ associé à la fonction entière $H : z \mapsto e^z - 1$ comme $P(D)$ l'est au polynôme P est l'opérateur qui à une fonction entière F associe $F(z+1) - F(z)$, d'où le lien entre les deux questions 1. et 2. de l'exercice.

i. Montrer que $f(z) = \prod_{\{|\alpha_i| \leq r\}} (z - \alpha_i)^{m_i} g(z)$, où g est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ qui ne s'annule pas dans un voisinage du disque fermé $\{|z| \leq r\}$.

ii. En utilisant la question 3. (a) montrer que, pour $r \in]0,1[\setminus A$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt = \log|g(0)| + \sum_{\{i,|\alpha_i| \leq r\}} m_i \log r = \log|f(0)| + \sum_{\{i,|\alpha_i| \leq r\}} m_i \log \frac{r}{|\alpha_i|}.$$

iii. En déduire que, pour $r \in]0,1[\setminus A$,

$$|f(0)| \prod_{\{i,|\alpha_i| \leq r\}} \left(\frac{r}{|\alpha_i|}\right)^{m_i} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{it}\right)\right| dt\right)$$

(formule de Jensen).

iv. On suppose maintenant de plus que la fonction f est bornée. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k > 0$, pour $r \in]r_k, 1[\setminus A$, $\prod_{i=1}^{k} |\alpha_i|^{m_i} \geq \frac{1}{C} |f(0)| \, r^{\sum_{i=1}^{k} m_i}$ (comparer $\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{r}{|\alpha_i|}\right)^{m_i}$ et $\prod_{\{i,|\alpha_i| \leq r\}} \left(\frac{r}{|\alpha_i|}\right)^{m_i}$). En faisant tendre r vers 1 conclure que le produit infini $\prod_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{m_i}$ converge et que $\prod_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{m_i} > 0$.

v. Soit α la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et m la suite de leurs multiplicités.

   A. En utilisant que, pour $0 \leq u \leq \eta$, η petit, on a $\log(1-u) \leq -u/2$, déduire de la question précédente que $\sum_{i=1}^{\infty} m_i (1 - |\alpha_i|) < +\infty$.

   B. Avec les notations de la question 2., conclure qu'il existe une fonction g holomorphe dans $\mathbb{D}$ ne s'annulant pas telle que $f = gB_{\alpha,m,0}$.

CHAPITRE V

TRANSFORMATIONS BIHOLOMORPHES THÉORÈME DE RIEMANN

V.1 Généralités

DÉFINITION V.1.1.

Une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est dite **univalente** si elle est injective.

PROPOSITION V.1.1.

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si f est univalente alors $f(\Omega)$ est ouvert et $f^{-1} : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Démonstration. Le fait que $f(\Omega)$ soit ouvert résulte du Théorème de l'application ouverte (Théorème II.3.2). Comme f est injective, le même Théorème dit que f' ne peut pas s'annuler. Alors en dérivant par rapport à $\bar{z}$ la relation $f^{-1}(f(z)) = z$, on trouve $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{\zeta}} = 0$. □

Remarque. Pour une fonction f holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$, la condition « f' ne s'annule pas » n'est pas suffisante pour que f soit univalente. Par exemple, la fonction $z \mapsto e^z$ a une dérivée qui ne s'annule pas mais n'est pas injective sur $\mathbb{C}$.

DÉFINITION V.1.2.

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$. On appelle **transformation biholomorphe** ou **biholomorphisme** ou encore **transformation conforme** de Ω sur Ω' tout homéomorphisme de Ω sur (i.e. surjectif) Ω' qui est holomorphe (ou encore toute application holomorphe univalente de Ω dans Ω' qui est surjective). Si une telle application existe, on dit que Ω et Ω' sont **conformément équivalents**. Si $\Omega = \Omega'$ une telle transformation est appelée un **automorphisme** de Ω.

Le problème étudié dans ce Chapitre est celui de savoir si deux ouverts de $\mathbb{C}$ sont conformément équivalents ou non. Cela n'est pas toujours le cas :

Exemple. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ ne sont pas conformément équivalents. En effet, dans le cas contraire il existerait une application holomorphe non constante bornée sur $\mathbb{C}$ ce qui contredit le Théorème de Liouville (Corollaire 1 de la Proposition II.2.6).

Les deux Propositions qui suivent sont immédiates :

PROPOSITION V.1.2.

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ conformément équivalents et f une transformation conforme de Ω sur Ω'. Alors toute autre transformation conforme de Ω sur Ω' est de la forme $f \circ \psi$ où ψ est un automorphisme de Ω.

PROPOSITION V.1.3.

Pour la composition, l'ensemble des automorphisme d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est un groupe que l'on note $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *et que l'on appelle le* ***groupe d'automorphismes*** *de Ω. De plus on dit que ce groupe est* ***transitif*** *si pour tous $a, b \in \Omega$ il existe $\varphi \in$* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *tel que $\varphi(a) = b$.*

PROPOSITION V.1.4.

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ conformément équivalents et f une transformation conforme de Ω sur Ω'. Alors les groupes $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *et* $\mathrm{Aut}(\Omega')$ *sont isomorphes par l'application $\Phi_f : \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}$.*

Démonstration. En effet, il est clair que $f \circ \varphi \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Omega')$, et on voit aussitôt que $\Phi_f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \Phi_f(\varphi_1) \circ \Phi_f(\varphi_2)$ et $\Phi_f\left(\varphi^{-1}\right) = \left(\Phi_f(\varphi)\right)^{-1}$. □

On remarquera que si deux ouverts de $\mathbb{C}$, Ω et Ω' sont conformément équivalents, toutes les propriétés de l'un stable par homéomorphisme sont satisfaites par l'autre. Par exemple, si Ω est simplement connexe alors Ω' l'est aussi. De même si $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est transitif alors $\mathrm{Aut}(\Omega')$ l'est aussi.

Les Définitions et remarques établies ci-dessus pour les ouverts de $\mathbb{C}$ s'étendent sans difficultés aux ouverts de la sphère de Riemann.

V.2 Exemples de groupes d'automorphismes

V.2.1 Le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$

PROPOSITION V.2.1.

Le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ est le groupe des transformations de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$ où $\alpha \in \mathbb{C}_*$ (i.e. $\alpha \neq 0$) et $\beta \in \mathbb{C}$. Ce groupe est transitif.

Démonstration. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$. Alors
- ou bien f est un polynôme,
- ou bien la fonction $\widetilde{f}(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, $0 < |z| < 1$, a un point singulier essentiel à l'origine.

En effet, si f n'est pas un polynôme, son développement en série entière n'est pas fini et la fonction $\widetilde{f}$ a une singularité essentielle en 0.

Dans le second cas, $\widetilde{f}(\{0 < |z| < 1\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ (Proposition II.2.5) donc $f(\{|z| > 1\})$ est dense dans $\mathbb{C}$, et, comme $f(\{|z| < 1\})$ est un ouvert (Théorème II.3.2) non vide, ce cas est impossible.

Ainsi f est un polynôme de degré d. Alors l'équation $f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, admet d racines (distinctes ou non, Corollaire 2 de la Proposition II.2.6), et comme f est injective, f' ne s'annule pas et $d = 1$.

La transitivité de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est évidente. □

V.2.2 Le groupe des automorphismes de la sphère de Riemann

PROPOSITION V.2.2.

Le groupe d'automorphismes de la sphère de Riemann est composé des transformations homographique

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

telles que $ad - bc \neq 0$. Ce groupe est transitif. $\mathrm{Aut} S^2$ *est donc isomorphe au groupe* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *des matrices complexes inversibles.*

Démonstration. Tout d'abord, ces transformations sont bien holomorphes sur S^2, la condition $ad - bc \neq 0$ implique qu'elles sont injectives, et, comme nous l'avons déjà vu à la Section IV.3.4, l'inverse d'une telle homographie est une homographie.

Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\left(S^2\right)$ qui laisse invariant ∞. Comme la restriction d'un élément de G à $\mathbb{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$, comme nous l'avons vu à la Section précédente, G est composé des homographies $z \mapsto \frac{az+b}{d}$, $d \neq 0$. Nous appliquons alors le Lemme élémentaire suivant :

Lemme V.2.1. *Soit Ω un ouvert de S^2. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. On suppose que :*

1. *G est transitif ;*
2. *Il existe un point $z_0 \in \Omega$ tel que le groupe d'isotropie de z_0 (i.e. le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ qui laisse invariant z_0) est contenu dans G.*

Alors $G = \mathrm{Aut}(\Omega)$.

Preuve du Lemme. Soit $S \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Comme G est transitif, il existe $T \in G$ tel que $T(z_0) = S(z_0)$. Alors $T^{-1} \circ S$ laisse z_0 fixe donc appartient à G, d'où on déduit que S aussi. □

Fin de la preuve de la Proposition. Puisque l'ensemble des homographies injectives est un sous-groupe transitif de $\mathrm{Aut}\left(S^2\right)$, et que le groupe d'isotropie de ∞ est contenu dans ce sous-groupe, il suffit d'appliquer le Lemme. □

V.2.3 *Le groupe des automorphismes du disque unité $\mathbb{D}$*

PROPOSITION V.2.3.
Soit $\mathbb{D}) \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est le groupe de transformation de Moëbius

$$\varphi_{a,\alpha} : z \mapsto e^{i\alpha} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

où $a \in \mathbb{D}$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$. Ce groupe est transitif.

Démonstration. Vérifions tout d'abord qu'une transformation de Moëbius envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même :

$$\begin{aligned} 1 - \left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|^2 &= 1 - \frac{(a-z)(\bar{a}-\bar{z})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{1+|a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires montrent que $\varphi_{a,0}\left(\varphi_{a,0}(z)\right) = z$, $z \in \mathbb{D}$, soit $\varphi_{a,0}^{-1} = \varphi_{a,0}$, $\varphi_{a,\alpha} = \varphi_{0,\alpha} \circ \varphi_{a,0}$, d'où $\varphi_{a,\alpha}^{-1} = \varphi_{a,0} \circ \varphi_{0,2\pi-\alpha}$, donc une transformation de Moëbius est un automorphisme de $\mathbb{D}$, la composée de deux transformations de Moëbius est une autre transformation de Moëbius et le groupe de ces transformations est transitif ($\varphi_{b,0}\left(\varphi_{a,0}(a)\right) = b$). Alors, d'après le Lemme du paragraphe précédent, il suffit, pour conclure, de montrer le Lemme suivant :

Lemme. *Un automorphisme de $\mathbb{D}$ qui laisse invariant l'origine est une rotation (i.e. de la forme $z \mapsto \varphi_{0,\alpha\pm\pi}(z) = e^{i\alpha}z$).*

Preuve du Lemme. Soit f un tel automorphisme. Le Lemme de Schwarz (Proposition II.2.12) implique d'une part $|f(z)| \leq |z|$ et, d'autre part, $\left|f^{-1}(z)\right| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$, ce qui donne $|f(z)| = |z|$ et la conclusion résulte du Lemme de Schwarz. □

□

V.3 *Le Théorème de Riemann*

Le but de cette Section est de démontrer le principal résultat du Chapitre :

THÉORÈME V.3.1 (Théorème de Riemann).
Tout ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent du disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe.

Nous allons faire la démonstration en plusieurs étapes.

PROPOSITION V.3.1.

Soit Ω un ouvert simplement connexe du plan complexe distinct de $\mathbb{C}$. Alors Ω est biholomorphe à un ouvert simplement connexe contenu dans $\mathbb{D}$ et contenant l'origine.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et g une détermination continue de $\log(z-a)$ dans Ω. Il est clair que g est injective (si $g(z) = g(w)$, on a $e^{g(z)} = e^{g(w)}$ donc $z - a = w - a$). Soit $z_0 \in \Omega$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall z \in \Omega$, on a $|g(z) - g(z_0) - 2i\pi| \geq \delta$: en effet, dans le cas contraire il existerait une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de points de Ω telle que $\lim_{n\to\infty} g(z_n) - g(z_0) - 2i\pi = 0$, et, en prenant l'exponentielle il viendrait $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - a}{z_0 - a} = 1$ ce qui entraîne $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0)$ ce qui est absurde.

Ainsi la fonction $z \mapsto u(z) = \frac{1}{g(z)-g(z_0)-2i\pi}$ est holomorphe dans Ω, injective et bornée : c'est un biholomorphisme de Ω sur un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Alors, par translation, Ω est biholomorphe a un ouvert borné de $\mathbb{C}$ contenant l'origine, et, par homothétie, on en déduit la Proposition. □

PROPOSITION V.3.2.

Soit Ω un ouvert contenu dans $\mathbb{D}$ contenant l'origine. Soit $A = \{f : \Omega \to \mathbb{D}$ injectives telles que $f(0) = 0\}$ (noter que A n'est pas vide l'identité appartenant à A). Alors, pour $f \in A$, on a $f(\Omega) = \mathbb{D}$ si et seulement si $|f'(0)| = \sup_{g\in A} |g'(0)|$.

On remarquera que $\sup_{g\in A} |g'(0)| < +\infty$, car, si $D(0,r) \subset \Omega$, $r > 0$, alors, pour $g \in A$, $g'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{g(z)}{z^2} dz$ (Théorème II.1.3), d'où $|g'(0)| \leq 1/r$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Pour tout $g \in A$, $h = g \circ f^{-1}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\Omega' = g(\Omega) \subset \mathbb{D}$. D'après le Lemme de Schwarz (Proposition II.2.12) on a $|h'(0)| \leq 1$ et, comme $g = h \circ f$, $|g'(0)| = |h'(f(0))|\,|f'(0)| \leq |f'(0)|$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Si $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$, soit $a \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Alors, comme composée de f et d'une transformation de Moëbius (Proposition V.2.3), la fonction $z \mapsto \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$ est holomorphe et injective sur Ω et son image est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{D}$ ne contenant pas 0. On peut donc considérer la fonction $F(z) = \log\left(\frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}\right)$ qui est holomorphe et injective sur Ω et vérifie $\Re F(z) < 0$, $z \in \Omega$. Ainsi, si on pose $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$, g est holomorphe sur Ω, $|g(z)| < 1$, $z \in \Omega$, et $g(0) = 0$ de sorte que $g \in A$. Or $g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0)+\overline{F(0)}}$, et comme $F'(0) = \left(\bar{a} - \frac{1}{a}\right) f'(0)$, il vient $\left|\frac{g'(0)}{f'(0)}\right| = \frac{1-|a|^2}{2\log\left|\frac{1}{a}\right|} > 1$ (car, pour $0 < t < 1$, on a $\frac{1-t^2}{t} - 2\log\frac{1}{t} > 0$) ce qui contredit la maximalité de $|f'(0)|$. □

Démonstration du Théorème V.3.1. D'après la Proposition précédente, il suffit de montrer qu'il existe $f \in A$ telle que $|f'(0)| = \sup_{g\in A} |g'(0)|$. Soit $B = \{f \in A$ tels que $|f'(0)| \geq 1\}$. Noter que l'identité appartient à B, de sorte qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans B telle que $\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \sup_{g\in B} |g'(0)| = \sup_{g\in A} |g'(0)|$. Comme cette suite est uniformément bornée, le Théorème de Montel (Corollaire de la Proposition II.2.10) et la Proposition II.2.10 elle même montrent qu'il existe une sous-suite $\left(f_{n_k}\right)_k$ qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f holomorphe sur Ω telle que $|f'(0)| \geq 1$. Pour conclure, il suffit de montrer que f est injective.

Si cela était faux, il existerait deux points distincts de Ω, a et b, tels que $f(a) = f(b) = \alpha$. Alors la suite $\left(f_{n_k} - \alpha\right)_k$ est une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers $f - \alpha$, fonction non identiquement nulle qui s'annule en a et b. Soient $D(a, r_1)$ et $D(b, r_2)$ deux disque ouverts disjoints contenus dans Ω et $U = D(a, r_1) \cup D(b, r_2)$. Les restrictions à U des fonctions $f_{n_k} - \alpha$ sont donc des fonctions holomorphes injectives. On obtient alors une contradiction avec l'injectivité des fonctions f_{n_k} en appliquant, à chacune des suites $\left(\left(f_{n_k} - \alpha\right)_{|D(a,r_1)}\right)_k$ et $\left(\left(f_{n_k} - \alpha\right)_{|D(b,r_2)}\right)_k$ la Proposition suivante :

PROPOSITION V.3.3.

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(h_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction holomorphe h. Alors, si pour tout n la fonction h_n ne s'annule pas dans Ω, soit h est identiquement nulle soit h ne s'annule pas dans Ω (autrement dit : si h s'annule mais n'est pas identiquement nulle, pour n assez grand, h_n s'annule dans Ω).

Démonstration. Supposons que h est non identiquement nulle et qu'elle s'annule en un point z_0. Alors, pour $r > 0$ assez petit, f ne s'annule pas sur le cercle $\{|z - z_0| = r\}$, et, si n_0 est l'ordre du zéro z_0, on a $\frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = n_0 \geq 1$ (Proposition II.3.5), et, par convergence uniforme des suites $(h_n)_n$ et $(h_n')_n$, pour n assez grand, on a $\frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{h_n'(z)}{h_n(z)} dz = n_0 \geq 1$ ce qui montre que h_n s'annule dans le disque $\{|z - z_0| < r\}$ (Proposition II.3.5). □

□

V.4

Régularité au bord des transformations conformes

DÉFINITION V.4.1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, et ζ un point de la frontière de Ω. On dit que ζ est **simple** si pour toute suite $(z_k)_k$ de points de Ω qui converge vers ζ, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \Omega \cup \{\zeta\}$ et une suite $(t_k)_k$ strictement croissante de points de $[0,1]$ tels que $\gamma(t_k) = z_k$ (ce qui implique, en particulier que $\gamma(1) = \zeta$).

On remarquera que les points du bord d'un ouvert quelconque ne sont pas simples en général : par exemple, si on considère l'ouvert Ω obtenu en prenant le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ du plan complexe et en lui enlevant l'intervalle $[0,1[$, alors les points de $]0,1[$ sont des points frontière de Ω qui ne sont pas simples.

THÉORÈME V.4.1.

Soient Ω un ouvert simplement connexe borné de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{D}$ une transformation conforme de Ω sur le disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe. Alors :

1. *Si ζ est un point simple de la frontière de Ω, f se prolonge continuement à $\Omega \cup \{\zeta\}$ et $f(\zeta) \in \mathbb{T}$.*
2. *Si ζ_1 et ζ_2 sont deux points simples distincts de la frontière de Ω et si f est prolongée à $\Omega \cup \{\zeta_1, \zeta_2\}$ on a $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$.*

COROLLAIRE.

Soit Ω un ouvert simplement connexe borné de $\mathbb{C}$. Si tout point de $\partial\Omega$ est simple, toute transformation conforme f de Ω sur $\mathbb{D}$ se prolonge en un homéomorphisme $\widetilde{f}$ de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ (donc tel que $\widetilde{f}(\partial\Omega) = \mathbb{T}$).

Démonstration. En effet, comme le Théorème dit qu'une transformation conforme f de Ω sur $\mathbb{D}$ se prolonge en une fonction continue $\widetilde{f}$ injective de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$, le Corollaire résulte de la compacité de $\overline{\Omega}$ et $\overline{\mathbb{D}}$. □

Remarque. Dans le Corollaire ci-dessus on a $f(\Omega) = \mathbb{D}$ et, par conséquent, $\widetilde{f}(\partial\Omega) = \mathbb{T}$ et $\partial\Omega$ est homéomorphe à $\mathbb{T}$. Ainsi, lorsque tout point de $\partial\Omega$ est simple, $\partial\Omega$ est un **arc de Jordan** (i.e. est homeomorphe au cercle unité $\mathbb{T}$). Récirpoquement, on peut montrer que si Ω est un ouvert dont la frontière est un arc de Jordan, alors tout point de $\partial\Omega$ est simple. Ceci donne le **Théorème de Caratheodory** : si Ω est un ouvert simplement connexe borné de $\mathbb{C}$, alors toute transformation conforme de Ω sur $\mathbb{D}$ se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ si et seulement si la frontière de Ω est un arc de Jordan.

Démonstration du Théorème V.4.1. Comme f est un biholomorphisme de Ω sur $\mathbb{D}$, en posant $g = f^{-1}$, $|f(z)|$ tends vers 1 quand $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ tends vers 0 (car sinon il existerait une suite $(z_n)_n$ dans Ω convergeant vers un point de $\partial\Omega$ et dont l'image par f serait contenus dans un compact de $\mathbb{D}$, ce qui contredit que f^{-1} est continue de $\mathbb{D}$ dans Ω) et, de même, $\operatorname{dist}(g(z), \partial\Omega)$ tends vers 0 quand $|z|$ tends vers 1.

Montrons tout d'abord 1. Nous utilisons le Lemme suivant :

Lemme (Kœbe). *Soit h une fonction holomorphe bornée dans un disque ouvert $D(0,R)$. On suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma : [1,1[\to D(0,R)$ tel que $\lim_{t\to 1} |\gamma(t)| = R$ et $\lim_{t\to 1} h(\gamma(t)) = \zeta$ mais que $\gamma(t)$ n'a pas de limite quand $t \to 1$. Alors $h(z) = \zeta, \forall z \in D(0,R)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer h par $z \to h(z) - \zeta$ on peut supposer $\zeta = 0$. Par hypothèse, lorsque $t \to 1$, $\gamma(t)$ a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes $w_1 = Re^{i\alpha_1}$ et $w_2 = Re^{i\alpha_2}$. Comme γ est continue, il en résulte que l'un des deux arcs de cercle joignant w_1 à w_2 est constitué de valeurs d'adhérences de $\gamma(t)$ quand $t \to 1$. Quitte à remplacer γ par $e^{i\alpha}\gamma$ et h par $z \to h\left(ze^{i\alpha}\right)$, $\alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, on se ramène au cas où le réel R est le milieu de cet arc, de sorte que, avec $\beta = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$, $w_1 = Re^{i\beta}$ et $w_2 = Re^{-i\beta}$.

Soient s un entier pair tel que $\frac{2\pi}{s} < |\beta|$ et

$$H(z) = \prod_{l=0}^{s-1} h\left(e^{2i\pi l/s} z\right) \overline{h\left(e^{2i\pi l/s}\overline{z}\right)}.$$

Clairement H est holomorphe dans $D(0,R)$ et est bornée par M^{2s}, avec $M = \sup_{D(0,R)} |h|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $t_0 < 1$ tel que, pour $t \in [t_0, 1[$, on ait $|\gamma(t)| \geq R - \varepsilon$ et $|h(\gamma(t))| \leq \varepsilon$. De plus, pour t_0 suffisament proche de 1, il existe un segment $[t_1, t_1'] \subset [t_0, 1[$ tel que $\gamma(t_1) = r \in [R-\varepsilon, 1[$ et $\gamma(t_1') = r'e^{2i\pi/s}$ avec $r' \in [R-\varepsilon, 1[$. Avec ces notations, on défini un chemin continu $\widetilde{\gamma}$ en juxtaposant les chemins suivants : pour $j = 1, 2, \ldots, s-1$,

– $e^{2i\pi j/s}\gamma_{|[t_1,t_1']}$ si j est pair et $j<s$: ce chemin joint le point $re^{2i\pi j/s}$ au point $r'e^{2i\pi(j+1)/s}$,
– $e^{2i\pi(j+1)/s}\overline{\gamma}_{|[t_1t_1']}$ si j est impair et $j<s$ où $\overline{\gamma}$ désigne le conjugué de γ parcourru en sens inverse : ce chemin joint le point $r'e^{2i\pi(j+1)/s}$ au point $re^{2i\pi(j+1)/s}$.

On remarque alors que l'argument de $\widetilde{\gamma}$ varie de 0 à 2π et que, sur chaque morceau de $\widetilde{\gamma}$ il y a un facteur de H qui est, en module, $\leq \varepsilon$. Donc, sur l'image de $\widetilde{\gamma}$ on a $|H|\leq M^{2s-1}\varepsilon$. Comme $\widetilde{\gamma}$ est un chemin fermé contenu dans $\{R-\varepsilon\leq|z|\leq R\}$, son complémentaire a une composante connexe Ω_ε qui contient le disque $D(0,R-\varepsilon)$, et la frontière de cette composante connexe, $\partial\Omega_\varepsilon$, est contenue dans l'image de $\widetilde{\gamma}$. Ainsi, par le principe du maximum, $\sup_{D(0,R-\varepsilon)}|H|\leq M^{2s-1}\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a $H=0$ et, par suite, $h=0$. □

La preuve du 1. du Théorème se déduit alors aisément de ce Lemme. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{D}$, $f(z)$ a au moins une valeur d'adhérence quand z tends vers ζ et il faut voir qu'il n'y en a qu'une. Supposons donc que, quand z tends vers ζ, $f(z)$ a deux valeurs d'adhérences w_1 et w_2 distinctes : on peut donc trouver une suite $(z_k)_k$ de points de Ω telle que $\lim_{k\to\infty}f(z_{2k})=w_1$ et $\lim_{k\to\infty}f(z_{2k+1})=w_2$. Par hypothèse il existe une chemin continu γ dans Ω passant par les points z_k tel que $\gamma(1)=\zeta$. Soit $\widehat{\gamma}=f\circ\gamma$. Alors $\widehat{\gamma}(t)$ n'a pas de limite quand t tends vers 1 et $\lim_{t\to1}f^{-1}\circ\widehat{\gamma}(t)=\zeta$. Le Lemme de Koebe ci-dessus donne alors $h(z)=\zeta$, $\forall z\in\mathbb{D}$ ce qui est absurde.

Montrons mailtenant le 2. du Théorème. Supposons que $f(\zeta_1)=f(\zeta_2)=w\in\mathbb{T}$. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins continus tels que $\gamma_j:[0,1]\to\Omega\cup\{\zeta_j\}$, $\gamma_j:[0,1[\to\Omega$ et $\gamma_j(1)=\zeta_j$. Alors, pour $r_0>0$ assez petit et $r\in\,]0,r_0]$, le chemin $f\circ\gamma_j$ coupe le cercle $\partial D(w,r)$ en au moins un point $f\circ\gamma_j(t_j(r))=p_j(r)=w\left(1-re^{i\vartheta_j(r)}\right)$, $\vartheta_j(r)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ avec $\lim_{r\to0}t_j(r)=1$ tel que que $\lim_{r\to1}f^{-1}(p_j(r))=\zeta_j$. On peut donc supposer r_0 choisit de sorte que, pour $r\in\,]0,r_0]$ on a $\left|f^{-1}(p_1(r))-f^{-1}(p_2(r))\right|\geq\frac{1}{2}|\zeta_1-\zeta_2|>0$. Comme l'arc de cercle $\widehat{p_1(r)p_2(r)}$ joignant $p_1(r)$ à $p_2(r)$ dans $\mathbb{D}$ est de longueur $\leq\pi r$, il vient (en utilisant l'inégalite de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}\left|f^{-1}(p_1(r))-f^{-1}(p_2(r))\right|^2 &= \left|\int_{\widehat{p_1(r)p_2(r)}}\left(f^{-1}\right)'(z)\,dz\right|^2\\ &\leq \pi r\int_{\vartheta_1(r)}^{\vartheta_2(r)}\left|\left(f^{-1}\right)'\left(w\left(1-re^{i\vartheta}\right)\right)\right|^2 r\,d\vartheta\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{4\pi r}|\zeta_1-\zeta_2|^2\leq\int_{\partial D(w,r)\cap\mathbb{D}}\left|\left(f^{-1}\right)'\left(w\left(1-re^{i\vartheta}\right)\right)\right|^2 r\,d\vartheta.$$

Comme

$$\int_0^{r_0}\int_{\partial D(w,r)\cap\mathbb{D}}\left|\left(f^{-1}\right)'\left(w\left(1-re^{i\vartheta}\right)\right)\right|^2 r\,d\vartheta\,dr$$

est l'aire de $f^{-1}(D(w,r_0)\cap\mathbb{D})$, il vient $\frac{1}{4\pi}|\zeta_1-\zeta_2|^2\int_0^{r_0}\frac{dr}{r}<+\infty$ soit $\zeta_1-\zeta_2=0$ contrairement à l'hypothèse. □

Étant donné deux triplets (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3) de points deux à deux distincts du cercle unité $\mathbb{T}$, il existe une unique transformation homographique φ telle que $\varphi(a_i)=b_i$, $i=1,2,3$ et φenvoie $\mathbb{T}$ sur lui-même. Il en résulte que, soit φ envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même, soit elle échange $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. On vérifie alors aisément que φ envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même si et seulement les triplets ont la même orientation (c'est-à-dire si les chemins constitués par la succession des arcs $\widehat{a_1a_2}$, $\widehat{a_2a_3}$, $\widehat{a_3a_1}$ et $\widehat{b_1b_2}$, $\widehat{b_2b_3}$, $\widehat{b_3b_1}$ respectivement ont le même indice ±1 par rapport à l'origine) (ceci résulte du fait que toute homographie qui échange $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ est la composée d'une transformation de Moëbius et de l'homographie $z\mapsto 1/z$). On déduit alors aussitôt de cette remarque le résultat suivant :

THÉORÈME V.4.2.

Soit Ω un ouvert simplement connexe borné du plan complexe dont tout point frontière est simple. Soient z_1, z_2 et z_3 trois points deux à deux distincts de la frontière de Ω et w_1, $w_2$etw_3 trois points deux à deux distincts de $\mathbb{T}$. Alors si les triplets (z_1,z_2,z_3) et (w_1,w_2,w_3) ont la même orientation (celle du premier étant calculée avec l'indice par rapport à un point $z_0\in\Omega$ du chemin obtenu en juxtaposant les arcs de courbe orientés $\widehat{z_1z_2}$, $\widehat{z_2z_3}$, $\widehat{z_3z_1}$), il existe une unique transformation conforme $f:\Omega\to\mathbb{D}$ dont le prolongement au bord par continuité vérifie, pour $i=1,2,3$, $f(z_i)=w_i$.

Exercices

EXERCICE V.1 (applications conformes).
Montrer que l'application
$$z \mapsto \log|z| + i\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi[}(z)$$
réalise une application conforme entre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\{|\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$.

EXERCICE V.2 (applications conformes).
Quelle est l'image de la bande
$$\{0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\}$$
par l'application $z \mapsto \cos z$? Décrire l'image des droites verticales et des segments horizontaux par cette application.

EXERCICE V.3 (applications conformes).
Construire (en utilisant des homographies convenables) une application conforme entre le disque unité $D(0,1)$ et l'ouvert U défini comme l'intersection de ce disque avec le disque ouvert $D(1,1)$. Plus généralement, construire une application conforme entre le disque unité et la *lunule* définie comme intersection de deux disques ouverts du plan complexe dont les frontières se coupent en deux points distincts d'affixes a et b.

EXERCICE V.4 (applications conformes, théorème de Riemann).
Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini comme $]0,1[^2$ auquel on a retiré tous les segments
$$[(1/n, 0), (1/n, 1/2)],\ n = 2, 3, \ldots$$
Montrer que U est conformément équivalent au disque unité ouvert $D(0,1)$, mais qu'il ne saurait y avoir d'application conforme entre $D(0,1)$ et U se prolongeant en une bijection continue entre $\overline{D}(0,1)$ et $\overline{U}$.

EXERCICE V.5 (homographies).
Montrer que la *fonction de Kœbe*
$$K\ : z \in D(0,1) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$
s'exprime en fonction de l'*homographie de Cayley* :
$$z \in D(0,1) \mapsto \frac{z+1}{1-z}$$
sous la forme
$$\forall z \in D(0,1)\,,\ K(z) = \frac{z(C(z)+1)^2}{4}\,,$$
et qu'elle réalise une transformation conforme entre $D(0,1)$ et $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$.

EXERCICE V.6 (Transformation conforme entre couronnes).
Soient R_1 et R_2 deux réels > 1. Pour $i = 1, 2$ on pose $A_i = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $1 < |z| < R_i\}$. Dans cet exercice on se propose de montrer que s'il existe une transformation conforme f qui envoie A_1 sur A_2 alors $R_1 = R_2$.

1. Expliquer pourquoi le résultat que l'on cherche à montrer n'est pas en contradiction avec le théorème de représentation de Riemann.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose donc que $f : A_1 \to A_2$ est un biholomorphisme entre A_1 et A_2.

2. En remarquant que lorsque z tend vers la frontière de A_1 $f(z)$ tend vers la frontière de A_2, montrer que, quitte à remplacer f par la fonction $g : z \mapsto R_2/f(z)$ on peut supposer que $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$ et $\lim_{|z|\to R_1} |f(z)| = R_2$. Dans toute la suite cette propriété est donc supposée satisfaite.
3. Soient $\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1}$ et $u(z) = \log|f(z)| - \alpha \log|z|$. Montrer que u est harmonique dans A_1. En remarquant que $u(z)$ tend vers zéro quand z tend vers la frontière de A_1, montrer que u est identiquement nulle et conclure que, pour tout $z \in A_1$, $|f(z)| = |z|^\alpha$.
4. Soit D un disque ouvert contenu dans A_1. Montrer qu'il existe une une fonction g holomorphe dans D telle que $f = e^g$. Déduire de la question précédente qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $e^{g(z)/\alpha} = \lambda z$, $z \in D$, et en déduire que, pour $z \in A_1$ on a $\frac{f'}{f}(z) = \alpha/z$ (noter que $\frac{f'}{f}(z) = g'(z)$ dans D).

5. Soit $1 < r < R_1$.

   (a) Déduire de la question précédente que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{i\vartheta})}{f(re^{i\vartheta})} ire^{i\vartheta}\,d\vartheta = \alpha$.

   (b) Soit $\gamma(\vartheta) = f(re^{i\vartheta})$. Montrer que $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2i\pi$ (remarquer que, f étant un homéomorphisme, la courbe γ ne peut pas être homotope à un point dans A_2 et ne peut pas faire plusieurs fois le tour de l'origine).

   (c) Conclure que $R_1 = R_2$.

EXERCICE V.7 (applications conformes, théorème 1/4 de Kœbe).

1. Soit f une fonction holomorphe injective dans $D(0,1)$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Montrer qu'il existe une série entière $[b_n X^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence au moins égal à 1, telle que

$$\forall z \in D(0,1)\setminus\{0\}\,,\ \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

2. Si le développement de f en série entière dans $D(0,1)$ est $f(z) = z + \sum_{k\geq 2} a_k z^k$, montrer que

$$\forall z,\ |z| > 1\,,\ a_2 + \frac{1}{f(1/z)} = z + \sum_{k\geq 1}\frac{b_k}{z^k}.$$

3. Déduire du fait que $z \mapsto 1/f(1/z)$ est injective dans $\{|z| > 1\}$ que

$$\sum_{k\geq 1} k|b_k|^2 \leq 1$$

   et en déduire $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ (*on s'inspirera de la méthode utilisée dans l'Exercice II.5*).

4. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $D(0,1)$, injective, telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, et $(g(z))^2 = f(z^2)$ pour tout $z \in D(0,1)$. En appliquant à g le résultat établi aux trois questions précédentes, montrer que $|f''(0)| \leq 4$. Il s'agit là du premier cran de la *conjecture de Bieberbach* (1916), prouvée par Louis de Branges en seulement 1985.

5. En appliquant le résultat établi au 4. à la fonction

$$\zeta \in D(0,1) \mapsto \frac{zf(\zeta)}{z - f(\zeta)}$$

   lorsque $z \notin f(D(0,1))$, montrer que nécessairement $|z| \geq 1/4$. En déduire que l'image par f du disque $D(0,1)$ contient nécessairement le disque ouvert $D(0,1/4)$. Ce résultat important est connu comme le *théorème un-quart de Kœbe.*

EXERCICE V.8 (la sphère de Riemann).

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. On définit la *distance cordale* entre z_1 et z_2 comme la distance de leurs antécédents sur la sphère de Riemann S^2 *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord. Montrer que cette distance est égale à

$$d_{\text{cord}}(z_1,z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

EXERCICE V.9 (la sphère de Riemann).

Soit ω une 1-forme méromorphe sur la sphère de Riemann S^2, i.e. une 1-forme que l'on peut écrire en coordonnées locales au voisinage de tout point $z_0 \in S^2$ sous la forme $f(\zeta)\,d\zeta$, où f est une fonction méromophe au voisinage de l'origine (correspondant à z_0).

1. Montrer que le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f ne dépend que de la forme ω et non de la représentation $f(\zeta)\,d\zeta$. En est-il de même pour les autres coefficients a_k ? On note $a_{-1}(z_0) := \text{Res}_{z_0}(\omega)$.
2. Montrer que si ω est une forme méromorphe dans S^2, alors il n'y a qu'un nombre fini de points où $\text{Res}_{z_0}(\omega) \neq 0$ et que la somme des nombres $\text{Res}_{z_0}(\omega)$, $z_0 \in S^2$, est égale à 0.

EXERCICE V.10 (transformation de Mœbius).

1. Montrer que si f est une transformation de Mœbius du disque unité dans lui-même, on a

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2}\,,$$

   ce que l'on exprime en disant que les transformations de Mœbius préservent la *métrique hyperbolique* sur le disque unité.

2. Montrer que si f est une application holomorphe d'un ouvert U de $D(0,1)$, à valeurs dans $D(0,1)$, et telle que

$$\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2} \quad \forall \zeta \in U\,,$$

alors f est une transformation de Mœbius (*on composera f avec une transformation de Mœbius adéquate de manière à se ramener à supposer de plus* $0 \in U$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, *et l'on montrera qu'alors* $f^{(k)}(0) = 0$ *pour tout* $k \geq 2$).

Chapitre VI

PROLONGEMENT ANALYTIQUE FONCTIONS MODULAIRES THÉORÈME DE PICARD

VI.1 Le cas des séries entières

Définition VI.1.1.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans Ω. Un point ζ_0 de la frontière de Ω est dit **singulier pour** f si, $\forall r > 0$ il n'existe pas de fonction h holomorphe dans $\Omega \cup D(\zeta_0, r)$ dont la restriction à Ω soit égale à f. Dans le cas contraire, ζ_0 est dit **régulier**.

Le Corollaire du Théorème de Weierstrass (Théorème IV.3.1) dit donc que, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$ il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle que tout point de la frontière de Ω est singulier pour f.

Dans cette Section nous allons donner une construction classique de telles fonction, dans le cas où l'ouvert est un disque, à l'aide de séries entières. Pour simplifier les notations, nous ne considérerons que des disques centrés à l'origine.

Proposition VI.1.1.

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence R, $0 < R < +\infty$. Alors il existe un point $\zeta_0 \in \{|z| = R\}$ qui est singulier pour f.

Démonstration. En effet, dans le cas contraire on pourrait recouvrir la frontière du disque $D(0,R)$ par un nombre fini de disque $D(\zeta_i, r_i)$, $r_i > 0$, tels que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe g_i sur $D(0,R) \cup D(\zeta_i r_i)$, et comme on doit avoir $g_i = g_j$ sur $D(\zeta_i, r_i) \cap D(\zeta_j, r_j)$, f se prolongerait holomorphiquement à un voisinage de l'adhérence de $D(0,R)$. □

Proposition VI.1.2.

Soient $\lambda \in \mathbb{N}_*$, et $(p_k)_k$ et $(q_k)_k$ deux suites d'entiers positifs non nuls, la suite $(p_k)_k$ (strictement croissante) vérifiant $\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) p_k < q_k \leq p_{k+1}$, pour tout k. Alors si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $a_n = 0$ pour $p_k < n < q_k$, pour tout k, et si β est un point de $\mathbb{T}$ régulier pour f, les sommes partielles $S_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n$ convergent au voisinage de β.

Démonstration. Comme la fonction $g(z) = f(\beta z)$ vérifie les même hypothèses que f, on peut supposer $\beta = 1$ de sorte que f se prolonge holomorphiquement à $\Omega = \mathbb{D} \cup D(1,\eta)$, $\eta > 0$. Posons $\varphi(w) = \frac{1}{2}\left(w^\lambda + w^{\lambda+1}\right)$. Pour $|w| \leq 1$ et $w \neq 1$, on a $|\varphi(w)| < 1$ et comme $\varphi(1) = 1$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\varphi(D(0, 1+\varepsilon)) \subset \Omega$ de sorte que l'on peut poser $F(w) = f(\varphi(w))$, $w \in D(0, 1+\varepsilon)$. Notons $F(w) = \sum b_n z^n$ le développement en série entière de F dans $D(0, 1+\varepsilon)$. Comme le plus petit exposant de $\varphi(w)^n$ est λn et le plus grand $(\lambda+1)n$, la condition sur les a_n donne $\sum_0^{p_k} a_n(\varphi(w))^n = \sum_0^{(\lambda+1)p_k} b_n z^n$, et comme la seconde série converge pour $|w| < 1+\varepsilon$, $S_{p_k}(z)$ converge dans $\varphi(D(0, 1+\varepsilon))$ donc dans un voisinage de 1. □

THÉORÈME VI.1.1 (Hadamard).

Soit $\lambda \in \mathbb{N}_*$. Soit $(p_k)_k$ une suite d'entiers positifs non nuls tels que $p_{k+1} > \left(1+\frac{1}{\lambda}\right) p_k$. Alors si la série entière $f(z) = \sum_1^\infty c_k z^{p_k}$ a un rayon de convergence égal à 1 (i.e. si $\overline{\lim}_{k\to\infty} |c_k|^{1/p_k} = 1$) tout point de $\mathbb{T}$ est singulier pour f.

Démonstration. Comme les sommes partielles ne peuvent converger en aucun point z de module > 1, c'est une conséquence de la Proposition précédente. □

Remarque. En choisissant convenablement les entiers p_k et les coefficients c_k, on peut faire en sorte que la fonction f soit $\mathscr{C}^\infty$dans $\overline{\mathbb{D}}$ (i.e. toutes ses dérivées sont continues dans $\overline{\mathbb{D}}$).

VI.2 Le Théorème de Monodromie

Par convention, dans la suite, nous appellerons ***paire*** (f,D) le couple formé par un disque D du plan complexe et une fonction f holomorphe dans D. Nous appellerons ***chaîne*** une suite $\mathscr{C} = \{D_0,\dots,D_n\}$ de disques du plan complexe telle que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$.

Deux paires (f_1,D_1) et (f_2,D_2) sont dites ***équivalentes***, ce que nous noterons $(f_1,D_1) \sim (f_2,D_2)$, si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et si les restrictions de f_1 et f_2 à cette intersection sont égales. Il est clair que la relation $(f_1,D_1) \sim (f_2,D_2)$ est une relation d'équivalence.

DÉFINITION VI.2.1.

Soient $\mathscr{C} = \{D_0,\dots,D_n\}$ une chaine, et, pour tout i, (f_i,D_i) une paire. Si pour tout i on a $(f_{i+1},D_{i+1}) \sim (f_i,D_i)$ on dit que (f_n,D_n) est un **prolongement analytique** de (f_0,D_0) **le long de** $\mathscr{C}$.

On remarquera qu'un prolongement (f_n,D_n) est entièrement déterminé par la chaîne $\mathscr{C}$ et f_0. On notera aussi que, dans la situation de la Définition ci-dessus, si $D_n \cap D_0 \neq \emptyset$ on n'a pas nécessairement $(f_0,D_0) \sim (f_n,D_n)$. Considérer, par exemple, une chaine de disques D_k, de rayons $r_k < 1/2$, centrés en des points du cercle unité $\mathbb{T}$, le premier et le dernier centrés au point 1, les paires étant $(\log(z),D_k)$ (où $\log(z)$ est une détermination du logarithme dans D_k).

Nous dirons qu'une chaîne $\mathscr{C} = \{D_0,\dots,D_n\}$, $D_i = D(z_i,r_i)$, est ***associée à un chemin continu*** $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ s'il existe une subdivision $0 = s_0 < \ldots < s_{n+1} = 1$ de $[0,1]$ telle que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_n$ et $\gamma([s_i,s_{i+1}]) \subset D_i$. De plus si une paire (f_0,D_0) peut être prolongée le long d'une telle chaîne, on dit que (f_n,D_n) est ***un prolongement de*** (f_0,D_0) ***le long de*** γ.

PROPOSITION VI.2.1.

Soient (f,D) une paire et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin continu tel que $\gamma(0)$ est le centre de D. Alors (f,D) admet au plus un seul prolongement analytique le long de γ. Plus précisément, si $\mathscr{C}_1 = \{A_i, 0 \le i \le m\}$ et $\mathscr{C}_2 = \{B_i, 0 \le i \le n\}$ sont deux chaînes associées à γ telles que $A_0 = B_0 = D$ et si (f,D) se prolonge le long de ces deux chaînes en (g_m,A_m) et (h_n,B_n) alors $g_m = h_n$ dans $A_m \cap B_n$.

Dans cet énoncé, on peut clairement remplacer A_m et B_n par le plus grand de ces deux disques et on a alors $g_m = h_n$.

Démonstration. Par hypothèse, on a deux subdivisions de $[0,1]$, $\{s_i, 0 \le i \le m+1\}$ et $\left\{\sigma_j, 0 \le j \le n+1\right\}$ associées respectivement aux chaînes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Clairement, il suffit de vérifier que si $[s_i,s_{i+1}] \cap \left[\sigma_j,\sigma_{j+1}\right] \neq \emptyset$ alors $(g_i,A_i) \sim (h_j,B_j)$. Si cela est faux pour certains couples (i,j), on en choisit un tel que $i+j$ soit minimal (ce qui implique $i+j > 1$). Supposons par exemple $s_i \ge \sigma_j$ (donc $i \ge 1$). Alors $\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j$ et, par minimalité de $i+j$ ($[s_{i-1},s_i] \cap \left[\sigma_j,\sigma_{j+1}\right] \neq \emptyset$) on a $(g_{i-1},A_{i-1}) \sim (h_j,B_j)$, et comme $(g_{i-1},A_{i-1}) \sim (g_i,A_i)$, on a $(g_i,A_i) \sim (h_j,B_j)$ ce qui contredit l'hypothèse. □

PROPOSITION VI.2.2.

Soient γ_0 et γ_1 deux chemins continus homotopes (avec extrémités fixes) et $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ une homotopie de γ_0 vers γ_1. Pour tout $t \in [0,1]$ notons $\gamma_t(s) = \varphi(s,t)$ les chemins intermédiaires. Soit (f,D) une paire dont le disque D est centrée en $\gamma_0(0)$. Alors, si (f,D) admet un prolongement (g_t,D_t) le long de chaque chemin γ_t, on a $g_0 = g_1$.

Démonstration. En effet, pour chaque t, la chaîne associée à γ_t est un recouvrement ouvert de γ_t, et, par continuité uniforme, pour $|u-t|$ assez petit, γ_u est contenu dans la réunion des disque de cette chaîne. Ainsi (g_t,D_t) est un prolongement de (f,D) le long de γ_u de sorte que $g_u = g_t$ (Proposition précédente). La Proposition s'en déduit alors par compacité. □

COROLLAIRE.

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit D un disque ouvert contenu dans Ω. Soit (f,D) une paire se prolongeant en (g,A) le long de tout chemin continu γ contenu dans Ω et d'origine le centre de D et d'extrémité un point $z \in \Omega$. Alors le prolongement de (f,D) le long d'un tel chemin est indépendant du chemin choisit.

Démonstration. En effet, d'après la Proposition, il suffit de voir que γ et $\widetilde{\gamma}$ sont deux chemins d'origine le centre de D et d'extrémité z alors ils sont homotopes. Si $\Omega = \mathbb{C}$ il suffit de prendre $\varphi(t,s) = (1-t)\gamma(s) + t\widetilde{\gamma}(s)$. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, le Théorème de Riemann (Théorème V.3.1) donne un homéomorphisme h de Ω sur le disque unité $\mathbb{D}$, et l'homotopie est donnée par $\varphi(s,t) = h^{-1}\left((1-t)h(\gamma(s)) + th(\widetilde{\gamma}(s))\right)$. □

THÉORÈME VI.2.1 (Théorème de Monodromie).

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit (f,D) une paire telle que D soit contenu dans Ω. Si (f,D) se prolonge le long de tout chemin continu contenu dans Ω d'origine le centre de D, alors il existe une fonction g holomorphe dans Ω dont la restriction à D est f.

Démonstration. D'après le Corollaire précédent, si β_1 et β_2 sont deux points de Ω et si (g_1,D_1) et (g_2,D_2) sont les prolongements de (f,D) le long de courbes d'extrémités β_1 et β_2 respectivement, alors, dans $D_1 \cap D_2$ on a $g_1 = g_2$: en effet, on peut prolonger la courbe joignant le centre de D à β_2 par un segment de droite joignant β_2 à β_1. On peut donc bien définir la fonction g en posant $g(z) = g_\beta(z)$ où $\left(g_\beta, D_\beta\right)$ est le prolongement de (f,D) le long d'une courbe joignant le centre de D au point $\beta \in \Omega$. □

VI.3 Fonctions modulaires

Dans toute la suite, nous noterons $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Im\mathrm{m} z > 0\}$ du plan complexe. $\mathbb{H}$ est conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D}$ via les transformations homographiques suivantes :

$$\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{H},\ z \mapsto i\frac{1+z}{1-z},$$

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ w \mapsto \frac{w-i}{w+i}.$$

De plus, φ se prolonge à $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, envoie $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{z\to 1} |\varphi(z)| = +\infty$.

DÉFINITION VI.3.1.

On appelle **groupe modulaire** le sous-groupe du groupe des automorphismes de la sphère de Riemann formé des transformations homographiques $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ telles que $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et $ad - bc = 1$.

La vérification de la Proposition qui suit est immédiate :

PROPOSITION VI.3.1.

Soit G le groupe modulaire.

1. *$\forall \varphi \in G$, $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on a $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\varphi(i) = \alpha + \frac{i}{c^2+d^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\varphi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, de sorte que les restrictions à $\mathbb{H}$ des homographies de G forment un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$.*
2. *Pour $\varphi \in G$, $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on a $\Im\mathrm{m}\varphi(z) = \frac{\Im\mathrm{m} z}{|cz+d|^2}$.*

Remarque. On peut montrer que les transformations $z \mapsto z+1$ et $z \mapsto -1/z$ engendrent le groupe modulaire.

DÉFINITION VI.3.2.

Une fonction f holomorphe sur $\mathbb{H}$ est dite **modulaire** si elle est invariante par G ou par un sous-groupe Γ de G (auquel cas on dit aussi Γ-modulaire) c'est-à-dire si $f \circ \varphi = f$, $\forall \varphi \in \Gamma$.

Dans toute la suite de cette Section, Γ désignera le sous-groupe de G engendré par les deux automorphismes suivants :

$$\sigma : z \mapsto \frac{z}{2z+1}, \text{ et } \tau : z \mapsto z+2.$$

Le principal but de la Section est de construire une fonction λ qui est Γ-modulaire. Pour cela on note (c. f. Figure VI.3.1)

$$Q = \{z = x+iy \in \mathbb{H} \text{ tels que } -1 \leq x < 1,\ |2z+1| \geq 1 \text{ et } |2z-1| > 1\}.$$

PROPOSITION VI.3.2.

Avec les notations Γ et Q de ci-dessus, on a :

1. *Pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, on a $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q) = \emptyset$;*
2. *$\mathbb{H} = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(Q)$;*
3. *Γ est l'ensemble des transformations homographiques φ de G de la forme $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a et d entiers impairs et b et c entiers pairs.*

On traduit les propriétés 1. et 2. de cette Proposition en disant que Q est un **domaine fondamental** de Γ.

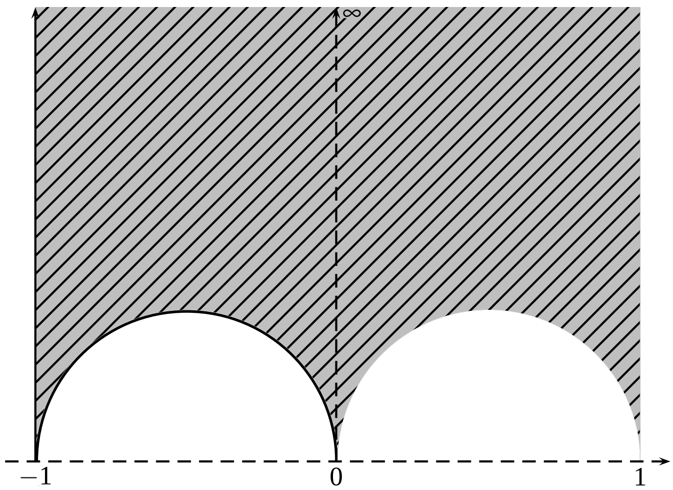


FIG. VI.3.1 – Domaine fondamental de Γ

Remarque. On défini classiquement le **sous-groupe de congruence** Γ_m de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ par

$$\Gamma_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ telles que } a, d = 1 \,\mathrm{modulo}\, m \text{ et } c, d = 0 \,\mathrm{modulo}\, m \right\} / \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}.$$

C'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Alors, avec ces notations, le groupe Γ introduit ci-dessus est le sous-groupe de congruence Γ_2 et il est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit Γ_1 l'ensemble des transformations homographiques décrites dans le 3. de la Proposition. Il est clair que Γ_1 est un sous-groupe du groupe modulaire qui contient σ et τ, de sorte que $\Gamma \subset \Gamma_1$. Pour démontrer que $\Gamma = \Gamma_1$, il faut donc démontrer 1. et 2. en remplaçant Γ par Γ_1 dans 1.

Comme Γ_1 est un groupe, pour montrer 1. pour Γ_1 il faut voir que, $\forall \varphi \in \Gamma_1$, $\varphi \neq \mathrm{Id}$, $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on a $\varphi(Q) \cap Q = \emptyset$ (si φ_1 et φ_2 sont deux éléments distincts de Γ_1, considérer $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$). Supposons tout d'abord $c = 0$. Alors $ad = 1$, soit $a = d = \pm 1$ et b est pair, de sorte que $\varphi(z) = z + 2n$, n entier non nul, et la définition de Q donne la relation voulue. Supposons maintenant $c \neq 0$.

Lemme. *Pour tout $z \in Q$, $|cz+d| > 1$.*

Preuve du Lemme. Dans le ces contraire, le cercle de centre $-d/c$ et de rayon $|1/c|$ coupe Q. Or, si un cercle centré sur $\mathbb{R}$ coupe Q alors un des points -1, 0 ou 1 appartient à l'intérieur de ce cercle, et, si w est un entier, $cw+d$ est un entier impair donc de module ≥ 1. □

Ainsi, la Proposition VI.3.1 donne $0 < \Im\mathrm{m}\varphi(z) < \Im\mathrm{m}z$, $z \in Q$. Alors si $z \in Q$ et $\varphi(z) \in Q$, en appliquant ce qui précède à φ^{-1} on obtient $\Im\mathrm{m}z = \Im\mathrm{m}\varphi^{-1}(\varphi(z)) < \Im\mathrm{m}z$ ce qui est absurde et achève de montrer 1.

Montrons maintenant 2. pour Γ. Posons $\Sigma = \bigcup_{\varphi\in\Gamma} \varphi(Q)$. En notant que $\tau^n(z) = z+2n$, et que σ envoie le cercle d'équation $\{|2z+1| = 1\}$ sur le cercle $\{|2z-1| = 1\}$, on voit aussitôt que Σ contient l'ensemble des points z de $\mathbb{H}$ vérifiant

$$|2z-(2m+1)| \geq 1, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Soit $w \in \mathbb{H}$ fixé. Soit $\varphi_0 \in \Gamma$ tel que, si $\varphi_0(z) = \frac{a_0z+b_0}{c_0z+d_0}$, on ait $|c_0w+d_0| = \min_{\varphi\in\Gamma,\, \varphi=\frac{az+b}{cz+d}} |cw+d|$ (remarquer que φ_0 existe car c et d sont des entiers). Par la Proposition VI.3.1, on a donc $\Im m\varphi_0(w) \geq \Im m\varphi(w) > 0, \forall\varphi \in \Gamma$, soit, si $z = \varphi_0(w)$, $\Im m\varphi(z) \leq \Im m z$, $\varphi \in \Gamma$. En appliquant ceci à $\varphi = \sigma\circ\tau^{-n}$ et à $\varphi = \sigma^{-1}\circ\tau^{-n}$, on trouve $\sigma\circ\tau^{-n}(z) = \frac{z-2n}{2z-4n+1}$ et $\sigma^{-1}\circ\tau^{-n}(z) = \frac{z-2n}{-2z+4n+1}$, et la Proposition VI.3.1 donne $|2z-4n+1| \geq 1$ et $|2z-4n-1| \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui, par ce qui précède, montre que $z \in \Sigma$ donc $\varphi_0^{-1}(z) = w \in \Sigma$ et achève la démonstration. □

Pour se faire une première idée du pavage de $\mathbb{H}$ par les $\varphi(Q)$, la figure qui suit montre l'image de $\overline{Q}$ par σ :

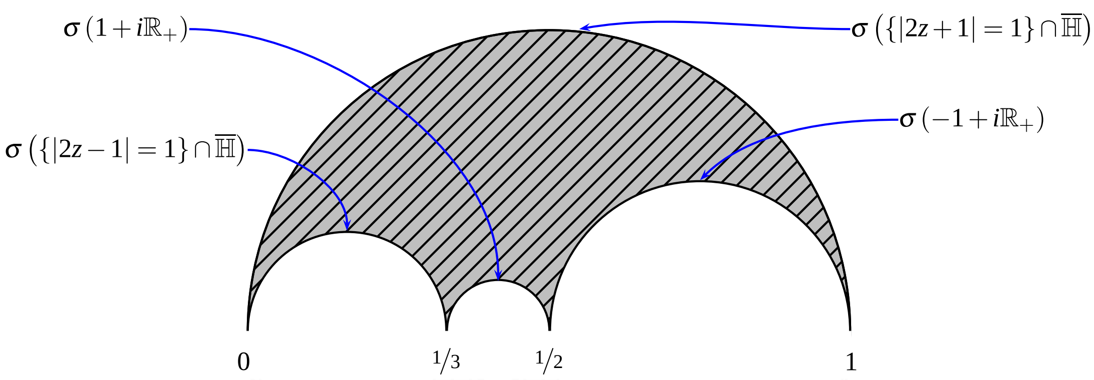


FIG. VI.3.2 – Image de $\overline{Q}$ par σ

THÉORÈME VI.3.1.

Soient Γ et Q comme dans la Proposition précédente. Il existe une fonction λ holomorphe dans $\mathbb{H}$ telle que :

1. *$\forall\varphi \in \Gamma$, $\lambda\circ\varphi = \lambda$ (i.e. λ est Γ-modulaire) ;*
2. *λ est injective sur Q ;*
3. *$\lambda(\mathbb{H}) = \lambda(Q) = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$;*
4. *λ ne se prolonge holomorphiquement à aucun ouvert du plan complexe strictement plus grand que $\mathbb{H}$.*

Démonstration. Posons $Q_0 = \{z \in Q \text{ tels que } \Re e z > 0\}$. On remarque tout d'abord que, d'après le Théorème V.4.2 il existe une fonction continue $h : \overline{Q_0} \to \overline{\mathbb{H}}$ injective, holomorphe de Q_0 sur $\mathbb{H}$ telle que $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ et $h(\infty) = \infty$, de sorte que $h(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}_-$, $h(1+i\mathbb{R}) = [1,+\infty[$ et $h(\{|2z-1| = 1\}\cap Q) =]0,1[$. Alors, le principe de symétrie de Schwarz (Proposition II.2.11), composé avec la multiplication par i, montre que la formule $h(-x+iy) = \overline{h(x+iy)}$ étends continument h à $\overline{Q}$ et $h_{|Q}$ est une transformation conforme de l'intérieur de Q sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. De plus, h est une bijection de Q sur $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ et

$$h(-1+iy) = h(1+it) = h(\tau(-1+iy)),\, y > 0,$$

$$h\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\vartheta}\right) = h\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i(\pi-\vartheta)}\right) = h\left(\sigma\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i\vartheta}\right)\right), 0 < \vartheta < \pi.$$

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, par la Proposition précédente, il existe une unique $\varphi \in \Gamma$ telle que z$\in \varphi(Q)$. On pose alors

$$\lambda(z) = h\left(\varphi^{-1}(z)\right).$$

Il est clair que λ est holomorphe dans tous les $\overset{\circ}{\widehat{\varphi(Q)}}$, et, ce qui précède montre que λ vérifie les propriétés 1., 2, et 3. du Théorème. De plus, la construction montre que λ est continue sur un voisinage de $\overline{Q}$ dans $\mathbb{H}$, donc aussi sur un voisinage V de $\overline{\varphi(Q)}$, $\varphi \in \Gamma$, et comme elle est holomorphe sur V privé de morceaux de droites et d'arcs de cercle (les images par $\varphi \in \Gamma$ des droites $-1+i\mathbb{R}_*^+$ et $1+i\mathbb{R}_*^+$ et des demi-cercles de $\mathbb{H}$ $\{|2z+1| = 1\}$ et $\{|2z-1| = 1\}$), elle est holomorphe dans V (Théorème II.1.1 pour les morceaux de droites et le même résultat pour les arcs modulo une transformation homographique) et on conclut que λ est holomorphe dans $\mathbb{H}$.

Enfin, si λ se prolongeait a un ouvert de $\mathbb{C}$ strictement plus grand que $\mathbb{H}$, comme, pour $\varphi \in \Gamma$, $\varphi(0) = {}^b\!/_d$, l'ensemble $\{\varphi(0),\, \varphi \in \Gamma\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, la propriété 1. impliquerait que λ se prolongerait aussi au voisinage de 0 et que $\lambda-\lambda(0)$ aurait un point d'accumulation de zéros dans son ouvert de définition ce qui est impossible. □

VI.4 Le Théorème de Picard

Le but de cette Section est de démontrer le Théorème suivant (comparer à la Proposition II.2.5) :

THÉORÈME VI.4.1 (Grand Théorème de Picard).
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Si f a une singularité essentielle en z_0, alors il existe $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ tel que son image $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ contient $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, et tout point de $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$ est atteint une infinité de fois.

À l'aide de la transformation $z \mapsto {}^1/_z$, on voit aussitôt que ce Théorème admet une version pour les fonctions entières :

COROLLAIRE.
Soit f une fonction entière qui n'est pas un polynôme. Alors il existe $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'image $f(\mathbb{C})$ de f contient $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, et tout point de $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$ est atteint une infinité de fois.

Nous allons faire la démonstration en plusieurs étapes.

VI.4.1 Un Théorème de Landau et un Thèorème de Bloch

THÉORÈME VI.4.2 (Landau).
Il existe une constante $A \geq {}^1/_{13}$ telle que, pour toute fonction f holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$ vérifiant $|f'(0)| \geq 1$, $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon A.

Ce Théorème est un cas particulier d'un théorème dû a Bloch :

DÉFINITION VI.4.1.
Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$. On appelle **constante de Bloch de** f le nombre $b(f)$ défini par :

$$b(f) = \sup\left\{r \geq 0, \text{ tels que } \exists \Omega \subset \mathbb{D} \text{ ouvert tel que } f_{|\Omega} \text{ est injective et } f(\Omega) \text{ contient un disque de rayon } r\right\}.$$

THÉORÈME VI.4.3 (André Bloch).
*Il existe une constante, appelée **constante de Bloch**, $\beta > 0$ telle que, pour toute fonction f holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $|f'(0)| \geq 1$ on a $b(f) \geq \beta$.*

Démonstration du Théorème VI.4.2. Supposons tout d'abord $f \in \mathscr{C}^\infty\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$. Posons $a(r) = (1-r)\sup_{|z|=r}|f'(z)|$, $0 \leq r \leq 1$. Comme $a(0) \geq 1$ et $a(1) = 0$, on a $s = \sup\{t \text{ tels que } a(t) = 1\} \in [0, 1[$. Soit $\zeta \in \mathbb{D}$ tel que $|\zeta| = s$ et $|f'(\zeta)| = \sup_{|z|=s}|f'(z)|$.

Posons $R = \frac{1-s}{2}$. Comme $|Rz + \zeta| \leq \frac{1-s}{2}|z| + s < \frac{1+s}{2} \leq 1$ si $|z| < 1$, la fonction F définie par

$$F(z) = 2\left(f(Rz + \zeta) - f(\zeta)\right)$$

est bien définie sur $\mathbb{D}$, $F(0) = 0$ et $F'(0) = 2Rf'(\zeta)$ d'où $|F'(0)| = \frac{1-s}{1-s} = 1$. D'autre part, par le principe du maximum, $\frac{|F'(z)|}{2} \leq R\sup_{\{|w|=s+R\}}|f'(w)|$, et, puisque $a(r) < 1$ pour $r > s$, $\frac{|F'(z)|}{2} \leq \frac{R}{1-s-R} = 1$, de sorte que $|F'(z)| \leq 2$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Lemme. *Soit F une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $F(0) = 0$, $|F'(0)| = 1$ et $|F'| \leq M$. Alors $F(\mathbb{D})$ contient le disque $D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$.*

Achevons tout d'abord la démonstration du Théorème de Landau, nous démontrerons le Lemme ensuite. Le Lemme donne $D(0, {}^1/_6) \subset F(\mathbb{D})$ et l'image de f contient donc un disque de rayon ${}^1/_{12}$ centré en $f(\zeta)$ ce qui achève la démonstration dans le cas $f \in \mathscr{C}^\infty\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$.

Pour le cas général, pour $0 < \rho < 1$, on pose $f_\rho(z) = \frac{1}{\rho}f(\rho z)$. Le cas déjà traité montre que $f_\rho(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon ${}^1/_{12}$ ce qui implique que $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon ${}^\rho/_{12}$. Comme ceci est valable pour tout $\rho \in]0, 1[$ le Théorème est démontré. □

Démonstration du Lemme. En remplaçant F par αF, $|\alpha| = 1$ (ce qui ne change pas la conclusion), on se ramène au cas où $F'(0) = 1$. Alors, le Lemme de Schwarz (Proposition II.2.12) appliqué à la fonction $z \mapsto \frac{F'(z)-1}{M+1}$ donne $|F'(z) - 1| \leq (M+1)\,|z|$ d'où

$$|F(z) - z| = \left|\int_0^1 \left(F'(tz) - 1\right) z\, dt\right| \leq \int_0^1 (M+1)\,|z|^2\, t\, dt = \frac{M+1}{2}\,|z|^2,$$

de sorte que, pour $|\zeta| = \frac{1}{M+1}$, on a $|F(\zeta) - \zeta| \leq \frac{1}{2(M+1)}$.

Alors, si $w \in D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$, on a $|F(\zeta) - w - (\zeta - w)| \leq \frac{1}{2(M+1)} < |\zeta - w|$ pour $|\zeta| = \frac{1}{M+1}$, et le Théorème de Rouché (Proposition II.3.7) implique que la fonction $z \mapsto F(z) - w$ a un zéro dans le disque $D(0, 1/M+1)$ c'est-à-dire que $F\left(D(0, 1/M+1)\right) \supset D(0, 1/2(M+1))$. $\square$

Pour finir cette Section, nous allons donner une démonstration simple du fait que la constante de Bloch (Théorème VI.4.3) est supérieure ou égale à $1/22$ (cette constante n'est pas optimale). Pour cela, il faut voir que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f'(0) = 1$ alors $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon $\geq 1/22$:

Démonstration du Théorème VI.4.3. Soit $a \in \mathbb{D}$ tel que $m = \left(1 - |a|^2\right)|f'(a)| = \sup_{\overline{\mathbb{D}}} \left(1 - |z|^2\right)|f'(z)| \geq 1$. Soit φ_a la transformation de Moëbius $\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$. Posons $h = f \circ \varphi_a$ de sorte que $h(0) = f(a)$, $h'(0) = \left(1 - |a|^2\right) f'(a) = m$, et que, pour $z \in \mathbb{D}$, $\left(1 - |z|^2\right)|h'(z)| = \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)|f'(\varphi_a(z))| \leq m$, car, par un calcul direct, on vérifie aussitôt que $\frac{\left(1-|z|^2\right)|\varphi_a'(z)|}{1-|\varphi_a(z)|^2} = 1$. Soit $k(z) = \frac{1}{h'(0)}\left(h(z) - h(0)\right)$ de sorte que $k(0) = 0$, $k'(0) = 1$ et $|k'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$. Notons $k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de k à l'origine. Puisque a_n est la dérivée $n-1$-ième de k' à l'origine, la formule de Cauchy (Théorème II.1.3) appliquée au cercle $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$, donne $|a_n| \leq \dfrac{1}{(1-\rho^2)\,\rho^{n-1}}$. On vérifie ensuite alors immédiatement que le maximun de la fonction $\rho \mapsto \left(1 - \rho^2\right)\rho^{n-1}$ sur $]0,1[$ est atteint pour $\rho^2 = \frac{n-1}{n+1}$ de sorte que, pour $n \geq 2$, $|a_n| \leq \dfrac{e}{2}(n+1) \leq M^n$, avec $M = \sqrt{3e/2}$.

Alors la Proposition II.3.6 montre qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{D}$ tel que k est un biholomorphisme de Ω sur un disque de rayon $\geq 1/22$, donc h est un biholomorphisme d'un ouvert Ω' de $\mathbb{D}$ sur un disque de rayon $\geq m/22$ et il en est de même de f. $\square$

VI.4.2 *Un Théorème de Schottky*

THÉORÈME VI.4.4 (Schottky).

Soient $M > 0$ et $r \in]0,1]$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, si f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $\{0,1\} \cap f(\mathbb{D}) = \emptyset$ et $|f(0)| \leq M$, alors, $\forall z \in D(0,r)$ on a $|f(z)| \leq C$.

Démonstration. Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, il existe une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, notée $\log f$, telle que $e^{\log f} = f$ et $|\Im\mathrm{m}(\log f(0))| \leq \pi$ (Proposition II.1.1). De plus, comme f ne prends jamais la valeur 1, $h = \frac{1}{2i\pi}\log f$ ne prends jamais de valeurs entières et h et $h-1$ ne s'annulent pas de sorte que l'on peut considérer les fonction holomorphes $\sqrt{h} = e^{\frac{1}{2}\log h}$ et $\sqrt{h-1} = e^{\frac{1}{2}\log(h-1)}$ (Proposition II.1.1). Il en résulte que la fonction $b = \sqrt{h} - \sqrt{h-1}$ ne s'annule pas et ne prends jamais les valeurs $\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}_*$: en effet, dans le cas contraire, i.e. $\sqrt{h(z)} - \sqrt{h(z)-1} = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_*$, pour un $z \in \mathbb{D}$, en prenant les inverses, il vient $\sqrt{h(z)} + \sqrt{h(z)-1} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}$ d'où $\sqrt{h(z)} = \sqrt{n}$ soit $h(z) = n$ ce qui est exclu.

Comme b ne s'annule pas, considérons la fonction holomorphe $k = \log b$. Par ce qui précède, cette fonction ne peut jamais prendre les valeurs $a_{n,m} = \log\left(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}\right) + 2i\pi m$, $n \in \mathbb{N}_*$, $m \in \mathbb{Z}$. Par un calcul fastidieux, on peut vérifier que tout disque de rayon 10 contient au moins un des points $a_{n,m}$, et, par suite, l'image de k ne peut contenir aucun disque de rayon 10.

Soit z un point de $\mathbb{D}$ tel que $k'(z) \neq 0$. Alors la fonction $\zeta \mapsto \frac{k(\zeta)-k(z)}{|k'(z)|}$ est définie dans le disque $D(z, 1-|z|)$ et le module de sa dérivée en z est égal à 1. Le Théorème de Landau (Théorème VI.4.2 appliqué à la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{1-|z|}\,\frac{k(z+(1-|z|)\xi)-k(z)}{|k'(z)|}$) implique que son image contient un disque de rayon $\frac{1-|z|}{13}$ et, par suite, l'image de k contient un disque de rayon $\frac{|k'(z)|(1-|z|)}{13}$. D'après ce qui précède, on a donc $|k'(z)|\,(1-|z|) \leq 130$.

Comme cette dernière inégalité reste vraie si $k'(z) = 0$, en écrivant $k(z) - k(0) = \int_{[0,z]} k'(\zeta)\, d\zeta$, il vient $|k(z)| \leq |k(0)| + 130 \log\frac{1}{1-|z|}$, donc, par le principe du maximum

$$|k(z)| \leq |k(0)| + 130 \log\frac{1}{1-r}, \text{ pour } |z| \leq r.$$

Or $e^k = \left(\frac{\log f}{2i\pi}\right)^{1/2} - \left(\frac{\log f}{2i\pi} - 1\right)^{1/2}$, donc, en prenant les inverses et en ajoutant, il vient

$$\left(\frac{\log f}{2i\pi}\right)^{1/2} = \frac{e^k + e^{-k}}{2}.$$

Ainsi, pour conclure, il suffit de voir que $|k(0)| \leq C$ où C est une constante qui ne dépends que de M. Supposons tout d'abord $|f(0)| \geq 1/2$. Alors $|\log f(0)| \leq \pi + \log(\max(2, M))$ d'où $\left|\frac{e^{k(0)}+e^{-k(0)}}{2}\right| \leq C_M$, donc $\frac{e^{\Re e k(0)}+e^{-\Re e k(0)}}{2} \leq C_M$ ce qui montre que $|\Re e k(0)|$ est majoré par une constante qui ne dépends que de M. Comme $k = \log b$, on peut toujours supposer $|\Im m k(0)| \leq \pi$, et on conclu que le Théorème est démontré lorsque $1/2 \leq |f(0)| \leq M$. Dans le cas où $|f(0)| \leq 1/2$, on applique ce que l'on vient de démontrer à la fonction $\widetilde{f} = 1 - f$ qui vérifie $1/2 \leq \left|\widetilde{f}(0)\right| \leq M + 1$, ce qui achève de démontrer le Théorème de Schottky. □

VI.4.3 *Démonstration du Grand Théorème de Picard*

Démonstration du Théorème VI.4.1. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que, pour chaque $r > 0$ fixé, l'image de f, $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$, contient tout le plan complexe privé d'au plus un point (dépendant à priori de r). La dernière assertion vient alors aussitôt du fait que le résultat est valable pour tout $r > 0$: en effet, si, pour $r_0 > 0$ $f(D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\})$ contient $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$ et s'il existe $\zeta \in f(D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\})$ tel que $f^{-1}(\zeta)$ est fini, alors le résultat démontré implique que, pour $0 < r < r' < r_0$, r' assez petit, $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ contient $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$, et, comme ζ ne dépends plus de $r < r'$, tout point de $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ est atteint une infinité de fois.

Par translation et homothétie, il suffit de faire la preuve lorsque $z_0 = 0$ et $r = e^{2\pi}$. Supposons le Théorème faux c'est-à-dire que $f(D(0, r) \setminus \{z_0\})$ ne contient pas deux points distincts a et b. Quitte à remplacer f par la fonction $z \mapsto \frac{f(z)-a}{b-a}$, on peut supposer que ces points sont 0 et 1.

Comme $f(D(0, r) \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ (Proposition II.2.5), on ne peut avoir $\lim_{z \to 0} |f(z)| = \infty$ ce qui implique qu'il existe une suite $(z_n)_n$ dans $D(0, r)$, convergeant vers 0 et un nombre $M < +\infty$ tels que $|f(z_n)| \leq M$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite $(|z_n|)_n$ est strictement décroissante et que $|z_n| \leq 1$. Soit $g_n(\zeta) = f\left(z_n e^{2i\pi\zeta}\right)$, de sorte que g_n est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et $|g_n(0)| \leq M$. Le Théorème de Schottky (Théorème VI.4.4) donne alors l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\left|f\left(z_n e^{2i\pi\zeta}\right)\right| \leq C$ pour $|\zeta| \leq 1/2$. En particulier, on a $\left|f\left(z_n e^{2i\pi t}\right)\right| \leq M$ pour $t \in [-1/2, 1/2]$, donc $|f(z)| \leq M$ pour $|z| = |z_n|$. Le principe du maximum donne alors $|f(z)| \leq M$ pour $|z_{n+1}| \leq |z| \leq |z_n|$ ce qui montre que $|f(z)| \leq M$ dans le disque pointé $D(0, |z_1|) \setminus \{0\}$ et la Proposition II.2.5 implique que f se prolonge holomorphiquement à l'origine. □

Remarque. Le Théorème de Picard admet clairement une version pour les fonction méromorphes c'est-à-dire pour les fonction holomorphes de $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann S^2. En particulier :

(Petit Théorème de Picard) Toute fonction holomorphe (i.e. méromorphe) non constante de $\mathbb{C}$ dans S^2 omet au plus deux points de S^2

Pour terminer, nous allons maintenant donner une démonstration du Petit Théorème de Picard ci-dessus basée sur les résultats des Sections VI.2 et VI.3 (sans utiliser te Théorème de Schottky).

Une démonstration du Petit Théorème de Picard. Il s'agit de montrer que si f est une fonction entière dont l'image ne contient pas deux points distincts α, β de $\mathbb{C}$ alors f est constante.

Quitte à remplacer f par $\frac{f-\alpha}{\alpha-\beta}$ on se ramène au cas où $f(\mathbb{C}) \cap \{0, 1\} = \emptyset$.

Soit λ la fonction modulaire du Théorème VI.3.1. Comme $\lambda(\mathbb{H}) = \lambda(Q) = \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, pour tout disque ouvert $D_1 \subset \Omega$ il existe un ouvert V_1 de Q tel que λ est bijective de V_1 sur D_1 et il existe donc ψ_1 holomorphe dans D_1 telle que, $\forall z \in V_1$, $\psi_1(\lambda(z)) = z$. La même propriété est clairement vraie si on remplace V_1 par $\widetilde{V_1} = \varphi(V_1)$, $\varphi \in \Gamma$, $\varphi \neq \mathrm{Id}$, et $\widetilde{V_1} \cap V_1 = \emptyset$.

Alors, en utilisant l'invariance de λ par Γ, on conclu que l'on peut trouver un ouvert *connexe*, noté encore V_1, de $\mathbb{H}$ tel qu'il existe une fonction ψ_1 holomorphe dans D_1 telle que $\psi_1 \circ \lambda = \mathrm{Id}$ sur V_1.

Soient D_1 et D_2 deux disques dans Ω tels que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Si V_1 et ψ_1 sont choisis, clairement, on peut choisir V_2 et ψ_2 de sorte que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, ce qui implique $\psi_1 = \psi_2$ sur $D_1 \cap D_2$: les paires (ψ_1, D_1) et (ψ_2, D_2) sont équivalentes.

Soit alors A_0 un disque centré à l'origine tel que $f(A_0)$ est contenu dans un disque D_0 contenu dans Ω. On choisit ψ_0 holomorphe dans D_0 comme ci-dessus et on pose $g_0 = \psi_0 \circ f$.

Soit γ un chemin continu dans $\mathbb{C}$ d'origine 0. Comme $f(\gamma([0, 1]))$ est compact, on peut recouvrir $\gamma([0, 1])$ par un nombre fini de disques A_i tels que $f(A_i)$ soit contenu dans un disque D_i contenu dans Ω et on peut choisir ψ_i holomorphe dans D_i de sorte que, sur $D_{i+1} \cap D_i$ (qui est non vide), on a $\psi_{i+1} = \psi_i$. Ainsi, $\psi_{i+1} \circ f = \psi_i \circ f$ sur $A_{i+1} \cap A_i$, et, en posant $g_i = \psi_i \circ f$, (g_i, A_i) est un prolongement analytique de (g_0, A_0) le long de γ.

Ceci montre que (g_0, A_0) se prolonge le long de tout chemin continu contenu dans $\mathbb{C}$ et le Théorème de Monodromie (Théorème VI.2.1) dit qu'il existe une fonction entière g telle que $g_{|A_0} = g_0$. Par construction $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{H}$ ce qui implique que la fonction $\frac{g-i}{g+i}$ est bornée sur $\mathbb{C}$, et le Théorème de Liouville (Corollaire 1 de la Proposition II.2.6) dit que cette dernière fonction doit être constante, donc g aussi, et comme $g_{|A_0} = \psi_0 \circ f$, ψ_0 bijective, f est constante sur l'ouvert non vide A_0 donc elle est constante, ce qui achève la preuve. □

Remarque. En améliorant les résultats des Sections VI.2 et VI.3 (essentiellement en introduisant la notion de revêtement et en montrant le Théorème du relèvement, qui est une amélioration du Théorème de monodromie (Théorème VI.2.1)), on peut voir que la démonstration ci-dessus peut être modifiée pour donner une démonstration du Grand Théorème de Picard.

Exercices[1]

EXERCICE VI.1 (théorème de Kœbe (cf. Exercice V.7) revisité).
Soit f une fonction holomorphe bornée du disque unité dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose $M = \|f\|_\infty$.

1. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus f(D(0,1))$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction h holomorphe dans $D(0,1)$ telle que $h^2(z) = 1 - f(z)/w$ pour tout z dans $D(0,1)$ et $h(0) = 1$. Donner les premiers termes du développement de h en série entière.
2. Montrer que
$$\|h\|_\infty^2 \leq 1 + \frac{M}{|w|}$$
et déduire du 1. et de la formule de PLancherel que $|w| \geq 1/(4M)$. Conclure que $f(D(0,1))$ contient le disque ouvert de rayon $1/(4M)$. Quelle est la différence avec le théorème de Kœbe ?

EXERCICE VI.2 (théorème de Bloch).
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ avec $f'(0) = 1$.

1. Montrer que
$$t \in [0,1] \mapsto t \sup\{|f'(z)|\,;\, |z| \leq 1-t\}$$
est continue sur $[0,1]$ et en déduire qu'il existe $t_0 > 0$ et $a \in D(0,1)$ avec $|a| \leq 1 - t_0$, $|f'(a)| = 1/t_0$ et $|f'(z)| < 1/t$ pour $t < t_0$ et $|z| \leq 1-t$.
2. Montrer que $|f'(z)| \leq 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$ et en déduire que la fonction g définie dans $D(0,1)$ par
$$g(z) = f(z) - f(a)$$
vérifie $|g(z)| \leq 1$ dans $D(a, t_0/2)$.
3. Déduire de l'exercice précédent que $f(D(0,1))$ contient le disque de centre $f(a)$ et de rayon $1/16$.
4. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour toute fonction f holomorphe dans $D(0,1)$, $f(D(0,1))$ contient un disque de rayon $C|f'(0)|$.

EXERCICE VI.3 (application du théorème de Bloch).
Soit F une fonction entière non constante. En utilisant la conclusion de l'exercice précédent avec les fonctions
$$z \mapsto F(\lambda z + \mu)$$
montrer que $F(\mathbb{C})$ contient des disques de rayon arbitrairement grand.

EXERCICE VI.4 (une application du grand théorème de Picard).
Montrer que, si P est un polynôme non nul, l'équation
$$e^z = P(z)$$
a une infinité de solutions.

[1] Une référence bibliographique pour les fonctions modulaires et leurs applications au Théorème de Picard est le cours d'arithmétique de J.P. Serre, Presses Universitaires de France, 1970.

ANNEXE

ANNEXE A

INTÉGRATION EN POLAIRES

A.1 Mesure euclidienne (ou invariante) sur une sphère

On note S_{n-1} la sphère de rayon 1 centrée à l'origine de $\mathbb{R}^n$ (la notation rappelle la dimension de cette sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^n$).

Soient $B(x,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } |x| < R\}$, $R > 0$, une boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et $S(x,R)$ sa frontière. Si A est un borélien de $S(x,R)$ le cône $C(A) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } y = x + \rho(\xi - x),\ \xi \in A,\ \rho \in]0,1]\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^n$ (car c'est l'image réciproque de $A \times]0,1]$ par la fonction continue $(\xi,\rho) \mapsto x + \rho(\xi - x)$) contenu dans l'adhérence de $B(x,R)$. On pose alors, par définition :

DÉFINITION A.1.1.

Avec les notations de ci-dessus, on note $\sigma = \sigma_{S(x,R)}$, $R > 0$, la mesure de Borel définie sur les boréliens de $S(x,R)$ par

$$\sigma(A) = \frac{n}{R}\lambda(C(A)),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure s'appelle la **mesure invariante** (ou **euclidienne**) sur $S(x,R)$.

De plus, $\sigma_{S(0,1)}$ est généralement notée σ_{n-1}.

La terminologie « invariante » provient du fait que, d'après les propriétés usuelles de la mesure de Lebesgue, σ_{n-1} est invariante par les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION A.1.1.

Soit f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, positive ou intégrable. Alors

$$\begin{aligned}\int f\,d\lambda &= \int_0^{+\infty} r^{n-1}\left(\int_{S(0,1)} f(r\xi)\,d\sigma_{n-1}(\xi)\right)dr\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{S(0,r)} f(\xi)\,d\sigma_{S(0,r)}(\xi)\right)dr.\end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons la première égalité. On remarque tout d'abord que cette formule à bien un sens lorsque f est positive, d'après le Théorème de Fubini-Tonelli. De plus, en utilisant le Théorème de Fubini, on voit aussitôt qu'il suffit de démontrer la formule lorsque f est positive ce que l'on suppose donc. Alors, f étant limite croissante de fonctions étagées, par le Théorème de Beppo-Levi, il suffit de vérifier la formule lorsque f est la fonction caractéristique d'un borélien de $\mathbb{R}^n$. Ainsi tout revient à voir que si μ est la mesure borélienne définie sur les boréliens E de $\mathbb{R}^n$ par

$$= \mu(E) = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \left(\int_{S(0,1)} \chi_E(r\xi)\, d\sigma_{n-1}(\xi) \right) dr,$$

où χ_E est la fonction caractéristique de E, elle est égale à la mesure de Lebesgue λ.

On vérifie tout d'abord que ces deux mesures prennent les même valeurs sur les tronc de cônes $E = r_2C(A) \setminus r_1C(A)$ où A est un borélien de $S(0,1)$ et $0 \leq r_1 < r_2 < +\infty$: en effet, par les propriétés de la mesure de Lebesgue, on a $\lambda(E) = (r_2^n - r_1^n)\,\lambda(C(A))$, et, par définition de σ_{n-1}, on a $\mu(E) = \int_0^{+\infty} r^{n-1}\chi_{]r_1,r_2]}(r)\sigma_{n-1}(A)\, dr$, ce qui donne bien $\lambda(E) = \mu(E)$.

On conclut alors (la mesure μ étant régulière) en remarquant que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de tels tronc de cône deux à deux disjoints.

La seconde formule de la Proposition s'obtient immédiatement par un changement de variables (si A est un borélien de $S(0,1)$, $\sigma_{S(0,r)}(rA) = r^{n-1}\sigma_{n-1}(A)$). □

COROLLAIRE 1.

Soit f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$ et posons $F(x) = f(|x|)$, de sorte que F est une fonction radiale. Alors :

1. *Si f est positive*
$$\int F\, d\lambda = s_{n-1} \int_0^{+\infty} r^{n-1} f(r)\, dr,$$
où s_{n-1} est la surface de la sphère $S(0,1)$ (i.e. $d\sigma_{n-1}(S(0,1))$).
2. *Si f est à valeurs réelles ou complexe, F est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $r \mapsto r^{n-1}f(r)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la formule du 1. est alors vraie.*

COROLLAIRE 2.

Soit ω_n le volume de $B(0,1)$. On a

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \text{ et } s_{n-1} = n\omega_n,$$

où Γ est la fonction d'Euler $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$, $\alpha > 0$. Explicitement, on a

$$\omega_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} \text{ si } p \geq 1,\ \omega_{2p+1} = \frac{2^{p+1}\pi^p}{1.3.\ldots.(2p+1)}.$$

Démonstration. En appliquant le Corollaire précédent à la fonction $f(r) = e^{-r^2}$, il vient

$$\pi^{n/2} = \int e^{-|x|} d\lambda(x) = s_{n-1} \int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}s_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt,$$

ce qui donne les formules compte tenu de la formule de récurrence $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Enfin les formules explicites s'obtiennent avec cette formule de récurrence et le fait que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$. □

Ainsi, le volume d'une boule de rayon R est $\lambda(B(x,R)) = \omega_n R^n$ et la surface d'une sphère de rayon R est $\sigma_{S(x,R)}(S(x,R)) = n\omega_n R^{n-1}$.

A.2 Intégration en polaires

Pour simplifier considérons le cas de $\mathbb{R}^3$. Les formules

$$x_1 = r\sin u \cos v,\ x_2 = r\sin u \sin v,\ x_3 = r\cos u$$

définissent un difféomorphisme $\mathscr{C}^\infty$ du demi-cylindre ouvert

$$\{0 < r < +\infty, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$$

sur l'ouvert

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0, x_1 > 0\}.$$

Le jacobien de ce difféomorphisme est $J(r,u,v) = r^2 \sin u > 0$. Le Théorème de changement de variables donne donc :

PROPOSITION A.2.1.

Soit f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^3$. Si f est positive ou intégrable on a

$$\int f\, d\lambda = \int_{\substack{0<r \\ 0<u<\pi \\ 0<v<2\pi}} f\left(r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u\right) r^2 \sin u\, dr du dv.$$

Cette formule permet, en particulier, de calculer la mesure euclidienne σ_2 sur S_2. Si A est un borélien de S_2, par définition, on a $\sigma_2(A) = \lambda(C(A))$, avec $C(A) = \{r\xi,\, r \in [0,1],\, \xi \in A\}$. Si h désigne l'application

$$h : (u,v) \mapsto (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)$$

de $U = \{(u,v)$ tels que $0 < u < \pi,\, 0 < v < 2\pi\}$ sur S_2 privée d'un demi-méridien M, on a

$$\sigma_2(A) = 3\int \chi_{C(A)}\, d\lambda = \int_{h^{-1}(A)} \sin u\, du dv.$$

Ainsi :

PROPOSITION A.2.2.

La restriction à $S_2 \setminus M$ de la mesure σ_2 est l'image par l'application h ci-dessus de la restriction au rectangle U de la mesure $(\sin u)\lambda$.

Ces résultats se généralisent aisément à $\mathbb{R}^n$ à l'aide du difféomorphisme de l'ouvert

$$\{0 < r < +\infty,\, -\pi/2 < \vartheta_i < \pi/2,\, 1 \le i \le n-1,\, 0 < \vartheta_{n-1} < 2\pi\}$$

sur $\mathbb{R}^n$ privé d'un demi-hyperplan fermé qui est défini par les formules

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & r\cos\vartheta_1 \\ x_2 & = & r\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \\ \dots & & \\ x_{n-1} & = & r\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \dots \cos\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1} \\ x_n & = & r\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \dots \cos\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1} \end{array}$$

et dont le jacobien est $r^{n-1}\cos^{n-2}\vartheta_1 \cos^{n-3}\vartheta_2 \dots \cos\vartheta_{n-2}$.

ANNEXE B

MESURE EUCLIDIENNE SUR UNE SOUS VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE. INTÉGRATION PAR « TRANCHES »

B.1 Cas des sous-variétés paramétrées

Rappelons que l'on appelle sous-variété différentiable paramétrée de dimension $p < n$ de $\mathbb{R}^n$ un couple (U, φ) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et φ une application différentiable de U dans $\mathbb{R}^n$ de rang p en tout point de U. On note G_φ le déterminant de Gram des vecteurs dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq p$, c'est-à-dire le déterminant (p, p) dont le terme de la i-ème ligne et j-ème colonne est le produit scalaire euclidien $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle$, et on pose :

DÉFINITION B.1.1.
On appelle **mesure euclidienne** (ou **naturelle**) sur la variété différentiable paramétrée (U, φ) la mesure, sur $\varphi(U)$, $\sigma_{(U,\varphi)} = \varphi\left(\sqrt{G_\varphi}\lambda_U\right)$ (i.e. l'image par φ de la mesure à poids $\sqrt{G_\varphi}\lambda_U$), où λ_U désigne la restriction à U de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$.

Précisément, si A est un borélien de $\varphi(U)$, on a

$$\sigma_{(U,\varphi)}(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{G_\varphi}\, d\lambda_U,$$

et si f est une fonction borélienne positive sur $\varphi(U)$,

$$\int f\, d\sigma_{(U,\varphi)} = \int_U (f \circ \varphi) \sqrt{G_\varphi}\, d\lambda_U.$$

Une propriété importante de cette mesure est son invariance par changement de variable :

PROPOSITION B.1.1.
Soit (U, φ) une sous-variété différentiable paramétrée de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Soit $\triangle$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ difféomorphe à U et soit ϑ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $\triangle$ sur U. Alors les mesures euclidiennes sur (U, φ) et $(\triangle, \varphi \circ \vartheta)$ sont égales.

Démonstration. En effet, on a $G_{\varphi\circ\vartheta}(\xi) = G_{\varphi}(\vartheta(\xi))\,|J_{\vartheta}(\xi)|^2$, où J_{ϑ} est le jacobien de ϑ, et la formule de changement de variables donne

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sqrt{G_{\varphi}}\lambda_U\right) &= \varphi\left(\sqrt{G_{\varphi}}\vartheta\left(\left|J_{\varphi}\right|\lambda_{\triangle}\right)\right) = \varphi\left(\sqrt{G_{\varphi}}\left(\left|J_{\vartheta}\circ\vartheta^{-1}\right|\vartheta\left(\lambda_{\triangle}\right)\right)\right)\\ &= \varphi\left(\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\vartheta}}\circ\vartheta^{-1}\right)\vartheta\left(\lambda_{\triangle}\right)\right) = \varphi\circ\vartheta\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\vartheta}}\lambda_{\triangle}\right).\end{aligned}$$

□

B.2 Cas général

Rappelons tout d'abord que l'on appelle sous-variété différentiable de dimension $p<n$ de $\mathbb{R}^n$ une partie V de $\mathbb{R}^n$ telle qu'en chacun de ses points x il existe un voisinage ouvert ω de x dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $h=h_\omega$ de ω sur un ouvert $h_\omega(\omega)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $h_\omega(\omega\cap V) = h_\omega(\omega)\cap\left\{(x_i)_i\in\mathbb{R}^n \text{ tels que } x_j=0 \text{ si } j\geq p+1\right\} = h_\omega(\omega)\cap\mathbb{R}^p$. Un tel couple $(\omega\cap V, h_\omega)$ est appelé une *carte locale* de V au voisinage de x.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des ouverts ω de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe un difféomorphisme h_ω de ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega\cup V\neq\emptyset$ et $h_\omega(\omega\cap V)=h_\omega(\omega)\cap\mathbb{R}^p$. Soit $U_\omega = h_\omega(\omega)\cap\mathbb{R}^p$ et φ_ω la restriction à U_ω de h_ω^{-1}. Soit σ_ω la mesure euclidienne associée à $(U_\omega,\varphi_\omega)$ comme dans la Définition B.1.1 du paragraphe précédent. La Proposition précédente dit que cette mesure est indépendante du choix du difféomorphisme $h_\omega$associé à ω et que si ω_1 et ω_2 sont deux ouverts de $\mathscr{E}$ tels que $\omega_1\cap\omega_2\cap V\neq\emptyset$ alors les restrictions de ω_1 et ω_2 à $\omega_1\cap\omega_2\cap V$ sont égales.

En considérant alors un recouvrement dénombrable de V par des ouverts de $\mathscr{E}$ et une partition de l'unité associée on conclut qu'il existe une mesure de Borel σ_V sur V telle que , pour chaque $\omega\in\mathscr{E}$, sa restriction à $\omega\cap V$ soit égale à σ_ω. Cette mesure est appelée le **mesure euclidienne** (ou **naturelle**) sur V.

Naturellement, dans le cas d'une sphère, cette mesure est la même que celle définie à la Définition A.1.1 du chapitre précédent.

Avec cette mesure, on peut écrite un théorème « *d'intégration par tranches* » qui est une généralisation de l'intégration en polaires :

PROPOSITION B.2.1.

Soit F une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dont le gradient ne s'annule en aucun point. Soit S_a la sous-variété différentiable $F_\lambda=\{F=a\}$. Alors pour toute fonction borélienne positive ou intégrable sur Ω on a

$$\int_\Omega f\,d\lambda = \int_{\{a \text{ tels que } S_a\neq\emptyset\}}\left[\int_{S_a}\frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|}d\sigma_{S_a}\right]da.$$

Remarque. En prenant $F(x)=\|x\|$ sur $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, cette Proposition redonne la Proposition A.1.1.

Démonstration. La théorie de l'intégration montre qu'il suffit de démontrer cette formule lorsque f est positive. Soit $a\in\Omega$. Puisque ∇F ne s'annule pas, nous pouvons supposer que $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe un ouvert U dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et un intervalle $I=]\lambda_1,\lambda_2[$, tel que $F(a)\in I$, et un difféomorphisme h d'un voisinage ω de a dans $\mathbb{R}^n$ sur $U\times I$ de la forme $h_i(x)=x_i$, $1\leq i\leq n-1$, $h_n(x)=F(x)$. Le difféomorphisme réciproque h^{-1} est donc de la forme $h_i^{-1}(\xi)=\xi_i$, $1\leq i\leq n-1$, $h_n^{-1}(x)=\varphi(x)$ et on a les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\circ\varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\circ\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} = 0,\ 1\leq i\leq n-1,$$

et

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\circ\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_n} = 1.$$

Avec ces notations, pour $\lambda\in I$, la sous-variété $S_\lambda\cap U$ est l'image de U par l'application φ_λ définie par

$$\varphi_\lambda(u) = \left(u_1,\ldots,u_{n-1},\varphi\left(u_1,\ldots,u_{n-1},\lambda\right)\right),\ u=\left(u_1,\ldots,u_{n-1}\right)\in U.$$

Comme, pour $1 \leq i, j \leq n-1$ on a

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_j}(u) \right\rangle = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\varphi_\lambda(u)\right) \frac{\partial F}{\partial x_j}\left(\varphi_\lambda(u)\right)}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right|^2}, \text{ si } i \neq j,$$

et

$$\left|\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_i}(u)\right|^2 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right)^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right|^2},$$

un calcul facile montre que le déterminant de Gram G_{φ_λ} vaut

$$G_{\varphi_\lambda}(u) = \frac{\left\|\nabla F\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right\|^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\varphi_\lambda(u)\right)\right|^2}.$$

Par suite, puisque $J_{h^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\varphi(\xi)\right)}$, la définition de la mesure euclidienne σ_{S_λ} donne, pour toute fonction borélienne positive nulle hors de ω

$$\int_{S_\lambda \cap \omega} \frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|} d\sigma_{S_\lambda} = \int_U f\left(\varphi_\lambda(u)\right) \left|J_{h^{-1}}(u,\lambda)\right| du_1 \dots du_{n-1}.$$

En intégrant par rapport à λ, il vient alors, en utilisant le théorème de changement de variables,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_{S_\lambda \cap \omega} \frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|} d\sigma_{S_\lambda}\right] d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_U f\left(\varphi_\lambda(u)\right) \left|J_{h^{-1}}(u,\lambda)\right| du_1 \dots du_{n-1}\right] \\
&= \int_{U \times I} f\left(h^{-1}(\xi)\right) \left|J_{h^{-1}}(\xi)\right| d\lambda(\xi) = \int_\omega f \, d\lambda.
\end{aligned}$$

Cette dernière formule est exactement celle de la Proposition pour une fonction f nulle hors de ω. Pour conclure en général, il suffit donc de recouvrir Ω par une famille dénombrable d'ouverts ω_m du type précédent et d'utiliser une partition de l'unité associée à ce recouvrement. $\square$

INDEX

Chemin
- *homotope à un point*, 8
- *homotopes avec extrémités fixes*, 8
- *intégrale d'une forme le long d'un*, 9
- *intégrale le long d'un*, 5
- *longueur d'un*, 5
- *régulier*, 6

Compact
- *à bord orienté*, 6
- *enveloppe d'holomorphie d'un*, 60
- *holomorphiquement convexe*, 60

Conjuguée
- *harmonique*, 50

Constante de Bloch
- *d'une fonction*, 90
- , 90

Différentielle extérieure
- *d'une fonction*, 1
- *d'une forme différentielle*, 3

Équations de Cauchy-Riemann, 62

Facteurs élémentaires de Weierstrass, 67

Fonction
- *de Green d'un ouvert*, 46
- *harmonique*, 42
- *holomorphe dans un ouvert*, 21
- *holomorphe en un point*, 21
- *de Kœbe*, 81
- *méromorphe en un point*, 25
- *modulaire*, 87
- *sous-harmonique*, 42, 45
- *sur-harmonique*, 42, 45
- *univalente*, 75

Forme différentielle
- *de degré 1*, 1
- *de degré p*, 2
- *exacte*, 3
- *image réciproque d'une*, 1, 2
- *localement exacte*, 3
- *primitive le long d'un chemin d'une*, 8
- *produit extérieur de*, 2

Formule
- *de Cauchy*, 22, 23
- *de Cauchy-Pompeïu*, 7
- *de Green*, 41
- *intégrale de Poisson*, 47
- de la moyenne
  - *pour les fonctions (sous- sur-)harmoniques*, 42
  - *pour les fonctions holomorphes*, 26
- *de Stokes*, 6

Groupe
- *de congruence*, 88
- de congruence
  - *domaine fondamental du*, 88
- *modulaire*, 87

Indice d'un lacet par rapport à un point, 7

Inégalités
- *de Cauchy*, 26

Intégrale
- *de Poisson*, 47

Lemme
- *de Kœbe*, 79
- *de Schwarz*, 27

Logarithme
- *détermination du*, 10
- *détermination continue du*, 10
- *détermination principale du*, 10

Noyau
- *de Green du disque unité*, 50
- *de Poisson du disque unité*, 50
- *de Poisson d'un ouvert*, 46

Ouvert
- *automorphisme d'un*, 75
- *conformément équivalents*, 75
- *simplement connexe*, 10

Partition de l'unité, 63

Principe
- du maximum global
  - *pour les fonctions (sous- sur-)harmoniques*, 44, 49
  - *pour les fonctions holomorphes*, 26
- du maximum local
  - *pour les fonctions (sous- sur-)harmoniques*, 44
  - *pour les fonctions holomorphes*, 26
- *de symétrie de Schwarz*, 27
- *des zéros isolés*, 24

Problème
de Cousin, 62
de Dirichlet classique, 47

Produit infini
de fonctions, 66
de fonctions holomorphes, 66

Prolongement analytique
le long d'une chaîne, 86
le long d'un chemin, 86

Série
de Laurent, 27

Singularité
essentielle, 25

Sphère de Riemann, 68

Théorème
de l'application ouverte, 30, 31
de Bloch, 90, 93
de Caratheodory, 79
de Cauchy, 21
de D'alembert, 26
de Hadamard, 86
de Landau, 90
de Liouville, 26
de Mittag-Leffler, 64
de Monodromie, 87
de Montel, 27
de Morera, 23
de Phragmen-Lindelöf, 31
de Picard (grand), 90
de Picard (petit), 92
des résidus, 29
de Riemann, 77
de Rouché, 11, 30, 31
de Runge, 59, 61
de Schottky, 91
1/4 *de Kœbe*, 82, 93
de Weierstrass, 64, 69

Transformation
biholomorphe, 75
conforme, 75
de Moëbius, 77

Transformée
de Poisson
d'une mesure, 51

BIBLIOGRAPHIE

[Ahl53] L. V. Ahlfors, *Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1953.

[AM04] E. Amar and E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[BD] L. Bonavero and J.-P. Demailly, *Variable Complexe*, Notes de cours mise en ligne par J.-P. Demailly, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/variable_complexe.pdf.

[BG91] C. Berenstein and R. Gay, *Complex variables : an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 125, Springer Verlag, 1991.

[Con78] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, second edition ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer Verlag, 1978.

[Dol90] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Maîtrise de mathématiques pures, Masson, 1990.

[Hei62] M. Heins, *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, Selected topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, 1962.

[Lan85] S. Lang, *Complex analysis*, second edition ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer Verlag, 1985.

[Mar85] A.I. Markuschevich, *Theory of funtions of a complex variable*, revised second edition ed., Chelsea publishing company, 1985.

[Nar85] R. Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser Verlag, 1985.

[NN01] R. Narasimhan and Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[Rud87] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1987.

[Seg81] S. L. Segal, *Nine Introductions in Complex Analysis*, Mathematics Studies, vol. 53, North-Holland, 1981.

[Yge01] A. Yger, *Analyse complexe et distributions*, Editions Ellipses, 2001.