UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, 2016–2017
MASTER "ANALYSE, EDP, PROBABILITÉS", UE 4TMS801U, EDP 2,
5 AVRIL 2017, DE 8H À 10H, bâtiment A29, amphi. E.
LES NOTES DE COURS SONT AUTORISÉES
LA QUALITÉ DE L'ARGUMENTATION ET DE LA RÉDACTION SERONT PRISES EN COMPTE.

Devoir surveillé
Equations aux dérivées partielles 2

Exercice 1 - On note $H^1(\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ avec une dérivée dans $L^2(\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $|| \ ||_{H^1}$ telle que $||f||^2_{H^1} = \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi^2|) \mid \mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$. Etant donnés une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $t > 0$, on pose $I(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|^2 dx$.

1. Exprimer $I(t)$ comme une intégrale faisant intervenir la transformée de Fourier $g = \mathcal{F}(f)$.

2. Pour $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose $\Psi = \int_0^{+\infty} |\cos(t\xi) - 1|^2 \frac{dt}{|\xi|^2 t^3}$. Démontrer que l'intégrale converge, et ne dépend pas de la valeur de ξ.

3. Démontrer que si $f \in H^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t>0} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|^2 \, dxdt}{t^3} = 4\Psi \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 \, |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

4. Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{R})$, et supposons que

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|^2 dxdt}{|t|^3} < +\infty.$$

Montrer que $f \in H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2 - On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

où $u(t,x,y)$ est une fonction à valeurs réelles.

I) a) En supposant $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^2))$ régulières, écrire la transformée de Fourier de la solution u du (1).

b) Ecrire la représentation intégrale de la solution du (1) en fonction de u_0.

c) Montrer la relation suivante vérifiée par l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x,y)|^2 dxdy + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_y u(t,x,y)|^2 dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x,y)|^2 dxdy.$$

II) On suppose ici que $u_0(x,y) = f(x)g(y)$ avec $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x,y)|^2 dxdy$ en fonction de f, g et de leur transformées de Fourier.

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_y u(t,x,y)|^2 dxdy \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad t > 0.$$

c) Montrer que $u(t,x,y) = v(t,x)w(t,y)$ avec $v(t,x)$ solution d'une équation d'Airy (c'est-à-dire l'équation $\partial_t v + v_{xxx} = 0$) et $w(t,y)$ solution d'une équation de la chaleur.