Exercice 1.

Soit $f \in C^0([a,b];E)$. Montrer que si $\int_a^b \|f(t)\| dt = 0$, alors $f = 0$.

□ Si f n'est pas identiquement nulle, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $\eta \in]0, b-a[$ tel que si $t \in [c-\eta, c+\eta] \cap [a,b]$, alors $\|f(t)\| \geq \|f(c)\|/2$. On en déduit que $\int_a^b \|f(t)\| dt \geq \int_{[c-\eta,c+\eta]\cap[a,b]} \|f(t)\| dt \geq \eta \|f(c)\|/2 > 0$ ce qui constitue une contradiction. Si f est seulement continue par morceaux, f sera nulle sur tout les intervalles ouverts de continuité, et éventuellement non nulle sur une partie finie. ■

Exercice 2. **a.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt.$$

□ On écrit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+t\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt.$$

Le changement de variable $x = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

b. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+nk+k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

□ On remarque que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$. Puique f est continue sur $[0,1]$, le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que S_n converge I quand n tend vers l'infini. ■

Exercice 3. Soit $R \in [0,1[$.

a. Montrer que pour tout $t \in [0,R]$ et tout N entier, on a

$$0 \leq \frac{1}{1-t^2} - \sum_{k=0}^N t^{2k} \leq \frac{t^{2N+2}}{1-R^2}.$$

□ on écrit

$$\frac{1}{1-t^2} - \sum_{k=0}^N t^{2k} = \frac{(t^2)^{N+1}}{1-t^2} \leq \frac{t^{2N+2}}{1-R^2}.$$

■

b. En déduire que l'on a

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) - \sum_{k=0}^N \frac{R^{2k+1}}{2k+1} \leq \frac{R^{2N+3}}{(1-R^2)(2N+3)}.$$

□ On intègre l'inégalité précédente sur $[0,R]$. ■

c. Comment peut-on calculer facilement une approximation de $\ln 3$ avec deux chiffres exacts après la virgule ?

☐ On choisit $R = \frac{1}{2}$ et on déduit de l'inégalité précédente que

$$0 \leq \ln 3 - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{4^k(2k+1)} \leq \frac{1}{6(2N+3)4^N}.$$

Pour $N = 2$ on obtient

$$0 \leq \ln 3 - \frac{263}{240} \leq \frac{1}{672}.$$

■

Exercice 4. **a.** Montrer que l'intégrale

$$I := \int_1^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

est convergente.

☐ La fonction $\frac{1+t^2}{1+t^4}$ est continue sur $[1, \infty[$ et équivalente à t^{-2} à l'infini qui est une fonction intégrable sur $[1, \infty[$. Donc elle est intégrable sur $[1, \infty[$. ■

b. Calculer sa valeur à l'aide de changements de variable (on pourra poser $x = t - \frac{1}{t}$).

☐ On écrit $dx = \frac{1+t^2}{t^2} dt$ et on remarque que $\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{1}{x^2+2}$. Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_1^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a-\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2+2} dx.$$

Puis on pose $y = x/\sqrt{2}$ et ce second changement de variable donne

$$I = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{a}} \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{a\to\infty} \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{a}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

■

Exercice 5. **a.** Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

☐ La fonction $f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, \infty[$. En zéro elle est équivalente à $x^{\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $[0, \pi]$. Donc f est intégrable sur $[0, \pi]$. Une intégration par parties sur $[\pi, b]$ donne :

$$\int_\pi^b f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{\cos b}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2} \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Comme $\left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq x^{-\frac{3}{2}}$ qui est intégrable sur $[\pi, \infty[$, on en déduit que $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[\pi, \infty[$, et comme $\frac{1-\cos b}{\sqrt{b}} \to 0$ quand $b \to \infty$, on conclut que l'intégrale de f sur $]0, \infty[$ est convergente. ■

b. Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

☐ On écrit pour tout entier $N \geq 2$:

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \left|\frac{\sin x}{\sqrt{(k+1)\pi}}\right| dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

■