Chapitre 0
Révisions de Terminale et compléments

Dans tout ce chapitre $\mathcal{D}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

1 Fonctions

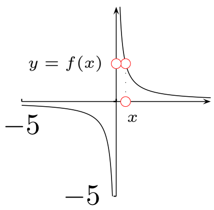
Définition 1.1. *On définit une* ***fonction*** *f sur $\mathcal{D}$, en associant à chaque $x \in \mathcal{D}$ un unique réel y, on note alors*

$$\begin{aligned} f : &\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longrightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

*On appelle alors $\mathcal{D}$ l'****ensemble de définition*** *de f, y est l'****image*** *de x par f et x est un* ***antécédent*** *de y. Soit $\mathcal{P}$ le plan ramené à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$. On appelle graphe de f ou encore courbe représentative de f l'ensemble des points $(x, f(x))$ de $\mathcal{P}$*

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dont on a tracé le graphique ci dessous



Définition 1.2. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.*
On dit que f est ***paire*** *lorsque $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et lorsque pour tout x dans $\mathcal{D}$, on a*

$$f(-x) = f(x).$$

Le graphe de la fonction f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On dit que f est ***impaire*** *lorsque $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et lorsque pour tout x dans $\mathcal{D}$, on a*

$$f(-x) = -f(x).$$

Le graphe de la fonction f est alors symétrique par rapport à l'origine.
On dit que f est ***périodique*** *de période T lorsque pour tout x dans $\mathcal{D}$, on a*

$$f(x + T) = f(x)$$

Exemples

- La fonction $f(x) = x^2$ est paire, en effet $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$.
- La fonction $g(x) = 1/x$ est impaire, en effet $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(-x) = 1/(-x) = -1/x = -g(x)$.
- La fonction $h(x) = sin(x)$ est périodique de période 2π, en effet pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $h(x + 2\pi) = sin(x + 2\pi) = sin(x) = h(x)$

Définition 1.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et soit $a \in \mathcal{D}$, on dit que f est* ***continue en*** *a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

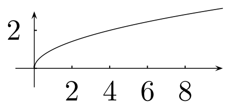
On dit que f est ***continue sur*** *$\mathcal{D}$ si f est continue pour tout $a \in \mathcal{D}$.*

Définition 1.4. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $Y \subseteq \mathbb{R}$, alors*

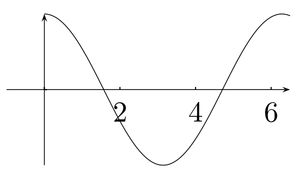
- *On dit que f est* ***injective*** *si pour tout $y \in Y$, il existe au plus un antécédent de y par f.*
- *On dit que f est* ***surjective*** *si pour tout $y \in Y$, il existe au moins un antécédent de y par f.*
- *On dit que f est* ***bijective*** *si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si pour tout $y \in Y$ il existe un unique $x \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) = y$.*

Exemples

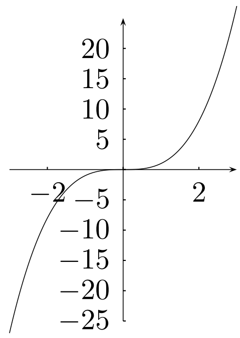
- Soit f la fonction définie sur $[0, \infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ dont le graphe est



  alors f est injective, en effet pour chaque $y \in \mathbb{R}$ il existe au plus un antécédent par f (un antécédent si x est positif ou nul et zéro sinon).
- Soit g la fonction définie sur $[0, 2\pi[$ par $g(x) = \cos x$ dont le graphe est



  alors g est surjective sur $Y = [-1, 1]$, en effet chaque élément de Y possède au moins un antécédent par g.
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3$, dont le graphe est donné par



alors h est bijective sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.5. *On dit qu'une fonction est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) si elle est croissante (resp. strictement croissante) ou si elle est décroissante (resp. strictement décroissante).*

Proposition 1.1. *Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $Y \subseteq \mathbb{R}$, strictement monotone.A f est injective.*

Terminons cette partie avec le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Théorème 1.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit $a, b \in I$ tels que $a < b$, alors*

Pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$. Si de plus f est monotone sur $[a, b]$, alors α est unique.

2 Dérivées et primitives

2.1 Dérivées

Dans toute cette partie f désigne une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

Définition 2.1. *Soit $a \in \mathcal{D}$, on dit que f est* ***dérivable en*** *a si la fonction*

$$h \to \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite réelle l en zéro. On dit alors que l est le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.
On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si f est dérivable en tout réel $a \in \mathcal{D}$ et on note f' la fonction définie sur $\mathcal{D}$ qui à chaque $x \in \mathcal{D}$ associe $f'(x)$.

Remarque 2.1. *Graphiquement le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. De plus on a l'équation de la tangente (Δ) à la courbe au point d'abscisse a suivante*

$$\Delta : \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour calculer la dérivée d'une fonction donnée on dispose du tableau suivant (à connaitre par cœur bien évidemment!!!)

fonction	dérivée	ensemble de dérivabilité
k avec $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tout intervalle $I \subseteq]0, \infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I \subset R$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(2k+1)\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Z}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, \infty[$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	Tout intervalle où u et v sont dérivables.
$k \cdot u(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \cdot u'(x)$	Tout intervalle où u est dérivable
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	Tout intervalle où u et v sont dérivables.
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	Tout intervalle où u et v sont dérivables et où v ne s'annule pas.
$v \circ u(x)$	$u'(x) \cdot v' \circ u(x)$	Pour tout x tel que u est dérivable en x et v est dérivable en $u(x)$.

On peut relier le signe de la dérivée au sens de variation de la fonction grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ et I un intervalle sur lequel f est de signe constant, on a alors*

- *f est (resp. strictement) croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout $x \in I$.*
- *f est (resp. strictement) décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ (resp. < 0) pour tout $x \in I$.*
- *f est constante sur I si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*

2.2 Primitives et intégration

Définition 2.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une* ***primitive*** *de f sur I est, si elle existe, une fonction F vérifiant $F' = f$.*

Remarque 2.2. *Si il existe une primitive F de f, alors il en existe une infinité, en effet pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est une autre primitive. En revanche étant donné un couple (x_0, y_0) il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.*

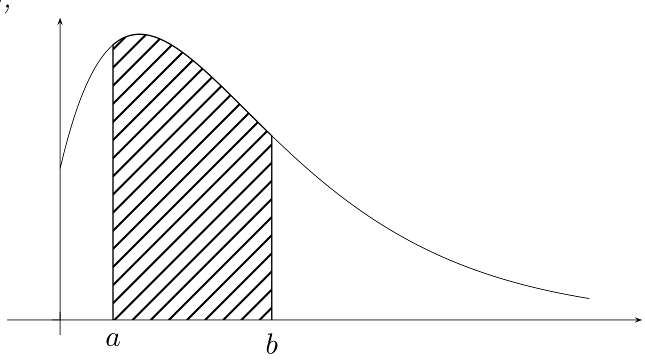
Pour calculer une primitive on pourra utiliser les tableaux suivants (à connaître par cœur bien évidemment !!!)

fonction	Une primitive
k avec $k \in \mathbb{R}$	kx
x^n avec $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x

Dans le tableau suivant u désigne une fonction dérivable,

fonction	Une primitive	remarque
$u' \cdot u^n$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$u'e^{'}$	$e^{'}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0 sur I$

Définition 2.3. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. Pour tout a et b dans I tels que $a < b$, l'aire du plan comprise entre le graphe de la fonction, l'axe des abcisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (partie hachuré dans le graphique ci dessous),*



s'appelle ***intégrale*** *de f entre a et b et on la note*

$$\int_a^b f(t)dt.$$

On étend la définition aux fonctions changeant de signe un nombre fini de fois, en calculant l'aire sur chaque intervalle où la fonction est de signe constant, chaque terme étant affecté du signe de f sur l'intervalle.

On peut calculer l'intégrale d'une fonction grâce à la formule suivante.

Proposition 2.2. *Soit f une fonction continue et F une primitive de f. On a :*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

On dispose également des formules de calcul intégral suivantes.

Proposition 2.3. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, $c \in [a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Soient μ et λ deux réels, alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

Pour finir on a la formule d'intégration par parties.

Proposition 2.4. *Soit u et v deux fonctions dérivables dont les dérivées sont continues sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Exemple
Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin nx dx$$

En utilisant une intégration par parties on calcule I_n en fonction de n.

3 Trigonométrie

Dans cette partie nous rappelons les formules de trigonométrie à connaitre par cœur, Commençons par la plus connue, soit $(a, b) \in \mathbb{R}$ alors

$$\cos^2 a + \sin^2 b = 1$$

La fonction cos est paire 2π-périodique, soit $x \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\begin{array}{rcl} \cos(x + 2\pi) & = & \cos x, \qquad \cos -x = \cos x, \qquad \cos x + \pi = -\cos x \\ \cos(\pi - x) & = & -\cos x, \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \end{array}$$

La fonction sin est impaire 2π-périodique, soit $x \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\begin{array}{rcl} \sin(x + 2\pi) & = & \sin x, \qquad \sin -x = -\sin x, \qquad \sin x + \pi = -\sin x \\ \sin(\pi - x) & = & \sin x, \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \end{array}$$

On a les formules d'additivités suivantes, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}$$

On en déduit les formules suivantes, soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

On déduit pour la tangente, soit a et b dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 \tan^2 a}
\end{aligned}$$

Finissons par les formules d'additions, soit p et q deux réels alors on a :

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

4 Nombres complexes

Définition 4.1. *Un* ***nombre complexe*** *est un nombre de la forme $a+ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et i vérifie $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.*

On peut additionner et multiplier deux nombres complexes de la façon suivante :

$$(a+ib)+(a'+ib') = a+a'+i(b+b')$$

$$(a+ib)\cdot(a'+ib') = aa'-bb'+i(a'b+ab')$$

Remarque 4.1. *Ces formules ne doivent pas être apprises par cœur, pour additionner ou multiplier deux nombres complexes on développe et on utilise simplement* $i^2=-1$.

> **Définition 4.2.** *Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, alors on appelle **partie réelle** de z et on note $Re(z)$ le nombre réel a. De même on appelle **partie imaginaire** de z et on note $Im(z)$ le nombre réel b. On définit l'opération **conjugaison** (noté $\bar{z}$) par la formule suivante*
>
> $$\bar{z} = a - ib.$$
>
> *Enfin on appelle **module** de z et on note $|z|$ la quantité $\sqrt{a^2+b^2}$.*

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 4.1. *Soit z un nombre complexe on a alors les relations suivantes*

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\cdot\bar{z} \\ z+\bar{z} &= 2Re(z) \\ z-\bar{z} &= 2Im(z). \end{aligned}$$

*Soit z' un autre nombre complexe on a alors **les inégalités triangulaires** suivantes :*

$$|z+z'| \le |z+z'|, \qquad \big||z|-|z'|\big| \le |z-z'|.$$

Proposition 4.2. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.*

> **Définition 4.3.** *Soit $z=a+ib$ un nombre complexe non nul, alors il existe un unique réel θ à un multiple de 2π près, appelé **argument** de z et noté $Arg(z)$, tel que :*
>
> $$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$
>
> *On appelle **forme trigonométrique** l'écriture d'un nombre complexe sous la forme précédente (l'écriture $z=a+ib$, s'appelle **forme algébrique**).*

Proposition 4.3. *Soit $z=a+ib$ un nombre complexe sous forme algébrique, on peut trouver sa forme trigonométrique grâce aux formules suivantes :*

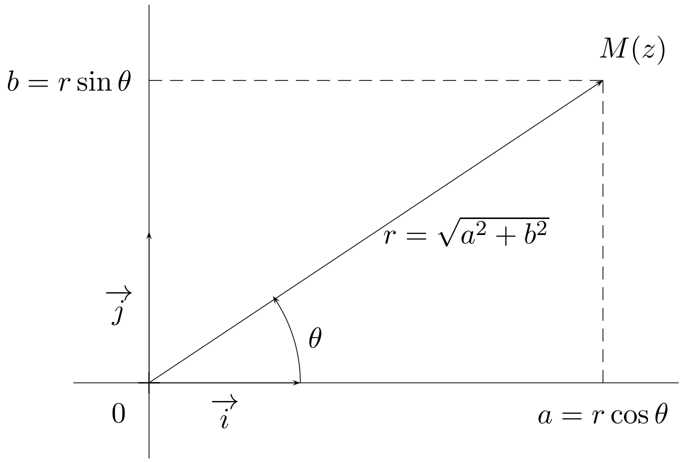
$$\begin{aligned} |z| = r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= a/r \\ \sin\theta &= b/r \end{aligned}$$

De même on peut passer de l'écriture trigonométrique à l'écriture algébrique grâce aux formules suivantes

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\theta \\ b &= |z|\sin\theta \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté aux repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$. À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) et réciproquement. On dit alors que $\mathcal{M}$ est **l'image** de z et que z est **l'affixe** de $\mathcal{M}$. On note également $M(z)$ le point M d'affixe z. Le plan ainsi décrit s'appelle **le plan complexe**.

La figure ci dessous représente graphiquement les propriétés de la proposition précédente.



Définition 4.4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on définit $e^{i\theta}$ par la formule suivante :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Remarque 4.2. *Grâce à cette définition on peut retrouver facilement les formules d'additions de* $\sin$ *et* $\cos$*. En effet il suffit d'utiliser $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$, de développer de chaque coté et de comparer partie réelle et partie imaginaire.*

Proposition 4.4 (Formule de Moivre et d'Euler)**.** *On déduit directement de la définition les formules suivantes, appelées formules d'Euler*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

ainsi que la formule de Moivre

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Remarque 4.3. *En combinant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on peut développer $\cos n\theta, \sin n\theta$ et $\tan n\theta$ et en combinant les formules d'Euler et le binôme on peut faire l'opération inverse (c'est à dire exprimer des puissances de cosinus et sinus en fonction de cosinus et sinus) appelé linéarisation.*

Pour finir on énonce l'une des propriétés essentielles de $\mathbb{C}$

Proposition 4.5. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$ avec a non nul, alors l'équation*

$$az^2 + bz + c = 0$$

a au moins une solution. En effet, on note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- *Si $\Delta > 0$, les racines de l'équation sont*

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– *Si* $\Delta = 0$, *l'équation a une seule solution*
$$\frac{-b}{2a}.$$
– *Si* $\Delta < 0$, *l'équation a deux solutions*
$$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

5 Équations différentielles

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une **équation différentielle** est une équation faisant intervenir une fonction y et ses dérivées successives y', y'', $y^{(3)}, \dots$ en inconnu.

5.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre** une équation du type
$$y' + ay = 0 \tag{1}$$
où a est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$..

Proposition 5.1. *Soit A une primitive de a sur I. Les solutions de* (1) *sont les fonctions, f_k, définies sur $\mathbb{R}$ par*
$$f_k(x) = ke^{-A(x)}$$
où k est un paramètre réel.

Remarque 5.1. *Si a est une fonction constante égale à α alors les solutions de* (1) *sont de la forme $f_k(x) = ke^{-\alpha x}$ où k est un paramètre réel.*

Remarque 5.2. *On peut déterminer k, en imposant des conditions initiales : on se donne un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et on résout l'équation en k : $f_k(x_0) = y_0$. Un problème où l'on cherche à résoudre une équation différentielle avec des conditions initiales s'appelle* ***problème de Cauchy****.*

Soit h une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre** une équation du type
$$y' + ay = h \tag{2}$$
Pour résoudre une telle équation on résout l'équation homogène associée (EH) : $y' + ay = 0$ grâce à la proposition 5.1. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation (2). Enfin on utilise le théorème suivant

Théorème 5.1. *Soit A une primitive de a sur I. Notons f_k les solutions de l'équation $y' + ay = 0$, d'après la proposition 5.1 on a $f_k(x) = ke^{-A(x)}$. Soit g une solution particulière de l'équation* (2)*. Alors les solutions ϕ_k de* (2) *s'écrivent*
$$\phi_k(x) = ke^{-A(x)} + g(x)$$
De même que précédemment, on peut considérer le problème de Cauchy associé en fixant des conditions initiales.

5.2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a \neq 0$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre** l'équation suivante

$$ay'' + by' + c = 0 \tag{3}$$

On peut résoudre une telle équation grâce au théorème suivant

Théorème 5.2. *On associe à l'équation* (3)*, ci dessus, l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$ *et son discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$*. On a alors deux cas*

Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- *Si* $\Delta \neq 0$*, on note* r_1 *et* r_2 *les solutions de l'équation caractéristique. Les solutions sont alors les fonctions* $\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ *où* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$
- *Si* $\Delta = 0$*, alors* $-b/2a$ *est racine double de l'équation caractéristique et les solutions sont les fonctions* $(\lambda x + \mu)\, e^{\frac{-b}{2a}x}$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- *Si* $\Delta > 0$*, on note* r_1 *et* r_2 *les solutions de l'équation caractéristique. Les solutions sont alors les fonctions* $\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ *où* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
- *Si* $\Delta = 0$*, alors* $-b/2a$ *est racine double de l'équation caractéristique et les solutions sont les fonctions* $(\lambda x + \mu)\, e^{\frac{-b}{2a}x}$ *où* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$
- *Si* $\Delta < 0$*, alors l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle. Les solutions sont les fonctions* $e^{-\frac{b}{2a}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right)$ *où* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

On considère à présent l'équation générale :

$$ay'' + by' + cy = f \tag{4}$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Comme pour le cas des équations du premier ordre, on dispose d'un théorème de structure des solutions.

Théorème 5.3. *Soit* φ *une solution de* (3)*, et* g *une solution particulière de l'équation* (4) *alors toutes solutions de* (4) *s'écrit :*

$$g + \varphi$$

Remarque 5.3. *Pour résoudre une équation du type* (4)*, il suffit de trouver une solution particulière et d'appliquer les deux théorèmes précédents.*

Pour finir cette partie nous ajoutons un théorème précisant la forme des solutions particulières de l'équation (4) lorsque f est une fonction "exponentielle polynôme".

Théorème 5.4. *Soit* $m \in \mathbb{K}$*,* P *un polynôme à coefficient dans* $\mathbb{K}$*. Alors l'équation*

$$ay''(x) + by'(x) + cy = P(x)e^{mx}$$

a au moins une solution de la forme $e^{mx}Q(x)$*, où* Q *est un polynôme de degré :*
- $deg(P)$ *si* m *n'est pas solution de l'équation caractéristique.*
- $deg(P) + 1$ *si* m *est solution simple de l'équation caractéristique.*
- $deg(P) + 2$ *si* m *est solution double de l'équation caractéristique.*

6 Complément : base de logique

6.1 Logique

Dans cette partie nous allons fixer les notations mathématiques et donner un cadre plus rigoureux aux raisonnements futurs. Nous allons également voir les différents types de raisonnements autorisés en mathématiques. Commençons par quelques définitions

Définition 6.1. *Une **assertion mathématique** est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité (vraie ou fausse).* Exemple

Exemple
- "$2 + 2 = 4$" est une assertion mathématique vraie.
- "π est un entier" est une assertion mathématique fausse.

Pour construire une théorie mathématique on se donne des **axiomes** qui sont des assertions mathématiques que l'on définit comme vraies. C'est sur ces axiomes que l'on peut raisonner. Par exemple on définit les entiers naturels grâce aux axiomes de *Peano* :

1. l'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté s(n) ou Sn.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

On peut également citer l'exemple de la géométrie, au IVème siècle avant Jésus Christ Euclide définit les bases de la géométrie dans son livre "*les éléments*" . Parmi ses axiomes on trouve notamment celui ci : "*Dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite*", au XIX ème siècle un mathématicien russe Lobatchevski construit une théorie géométrique (appelée géométrie hyperbolique, en opposition à la géométrie euclidienne) où l'on ne suppose pas cet axiome vrai.

Ces assertions vraies sont appelées, selon leur importance : **théorème** (important), **proposition** (un peu moins), **lemme** (qui sert surtout pour les autres propositions), **corollaire** (une conséquence quasi-immédiate mais néanmoins intéressante d'une autre proposition).

Définition 6.2. *Soient P et Q deux assertions mathématiques. On dit qu'une assertion P **implique** Q, et l'on notera $P \Longrightarrow Q$, si Q est vraie dès que P est vraie. On dit alors que P est une **condition suffisante** à Q et que Q est une **condition nécessaire** à P.*
*On dit que P **et** Q **sont équivalentes** et on notera $P \Longleftrightarrow Q$ si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$. On dit alors que P est une **condition nécéssaire et suffisante (CNS)** à Q.*

Énonçons maintenant quelques propriétés logique permettant de survivre en math.

Proposition 6.1. *Soient P et Q deux assertions mathématiques. On note $non(P)$ et $non(Q)$ la négation des propositions P et Q. On a alors :*
- $non(non(P)) \Longleftrightarrow P$.
- $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P))$.
- $non\,(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ et } non(Q)$
- $non\,(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ ou } non(Q)$

Les propriétés logiques exposées ci dessus permettent de dégager trois types de raisonnement logique : raisonnement direct, par contra-posé et par l'absurde. Supposons que l'on se donne deux propositions P et Q. On souhaite montrer que $P \Longrightarrow Q$.

Raisonnement direct Si on raisonne de manière directe on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Raisonnement par contra-posé Si on raisonne par contra-posé on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse. Par exemple, on prend pour P :"s'appeler Sophie" et Q "être un fille". Alors montrer que $P \Longrightarrow Q$ équivaut à montrer que "être un garçon" implique "ne pas s'appeler Sophie".

Raisonnement par l'absurde On souhaite montrer que P est vraie. Si on raisonne par l'absurde on suppose que P est fausse, et on cherche Q dont on sait qu'elle est vraie telles que $non(P) \Longrightarrow non(Q)$.

Par exemple, soit P la propriété "$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel". Par l'absurde, on suppose que "$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel", il existe donc deux nombres entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = p/q$, on a alors $2q^2 = p^2$ mais alors p^2 est pair donc p est pair et s'écrit $p = 2p'$. On déduit de ce qui précède que $q^2 = 2p'^2$ et donc q est pair ce qui contredit l'hypothèse p et q premiers entre eux et donc "$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel".

On a en fait un quatrième type de raisonnement, qui lui utilise les propriétés des nombres naturels, le raisonnement par récurrence :

Raisonnement par récurrence Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, une assertion P_n , ce qui donne une suite d'assertions. On suppose que P_0 est vraie et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$. La conclusion est alors que pour tout entier naturel n l'assertion P_n est vraie.

Exemple

Montrons par récurrence que pour tout $n \in N$ et $n \geq 1$ on a

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On procède en 3 étapes :

1. Initialisation. On montre que P_1 est vraie. Pour $n = 1$ la partie de gauche de l'équation vaut 1 tandis que la partie de droite vaut $1 \cdot (1 + 1)/2 = 1$, donc P_1 est vraie.
2. Hérédité. Soit $k \geq 1$, on montre que $P_k \Longrightarrow P_{k+1}$. On suppose P_k est vraie et on montre que P_{k+1} est vraie. Or on a
$$\underbrace{1 + \cdots + k}_{= \frac{k(k+1)}{2} \text{ par } P_k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
et donc P_{k+1} est vraie.
3. Conclusion. Par le principe de récurrence, on déduit que pour tout $n \in N$ et $n \geq 1$ on a
$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6.2 Théorie des ensembles

Définition 6.3. *On appelle **ensemble** E, une collection d'objets, dits éléments de E. L'assertion "x est un élément de E " se note $x \in E$, inversement l'assertion "x n'est pas un élément de E" se note $x \notin E$. L'ensemble contenant aucun élément est appelé ensemble vide et est noté $\varnothing$.*

$E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Définition 6.4. *Soient A et B deux ensembles, on dit que A* ***est inclus dans*** *B et on note $A \subset B$, si tout élément de A appartient à B. On dit que A* ***et*** *B* ***sont égaux*** *et on note $A = B$ s'ils ont exactement les mêmes éléments.*

Proposition 6.2. *Soient A et B deux ensembles, alors :*

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Définition 6.5. *Soient E et F deux ensembles on construit le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, en considérant l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.*

Pour finir ce premier chapitre nous allons définir les quantificateurs qui seront constamment utilisés dans la suite du cours.

Définition 6.6. *Soit E un ensemble et $P(x)$ une assertion portant sur les éléments de E, on considère la partie de E*

$$F = \{x \in E | P(x) \text{ vraie }\}$$

l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie. On notera alors :

- *$(\forall x \in E | P(x))$, l'assertion $F = E$: on a pour tout x dans E, $P(x)$ est vraie. $\forall$ est le* ***quantificateur universel***
- *$(\exists x \in E | P(x))$, l'assertion $F \neq \varnothing$: il existe x dans E tel que $P(x)$ soit vraie. $\exists$ est le* ***quantificateur existentiel***
- *$(\exists! x \in E | P(x))$, l'assertion F est singleton : il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ soit vraie.*

Proposition 6.3. *On a les négations suivantes :*

$$\begin{aligned} non\,(\forall x \in E | P(x)) \quad &\Longrightarrow \quad (\exists x \in E | non\,(P(x))) \\ non\,(\exists x \in E | P(x)) \quad &\Longrightarrow \quad (\forall x \in E | non\,(P(x))) \end{aligned}$$

On peut également utiliser plusieurs quantificateurs dans la même assertion, soit P une assertion portant sur un couple $(x, y) \in E \times F$. On écrit alors

$$\forall x \in E, \quad \exists y \in \mathbb{F}, \quad P(x, y)$$

Il s'agit, en fait, d'un abus de notation on devrait écrire $\forall x \in E, \quad (\exists y \in \mathbb{F}, \quad P(x, y))$. Il faut manipuler les successions de quantificateurs avec précaution : On a le droit d'intervertir deux quantificateurs identiques. On peut également nier une assertion, par exemple le négation de l'assertion ci-dessus est :

$$\exists x \in E, \quad \forall y \in \mathbb{F}, \quad non\,(P(x, y)).$$