CPP 1 ère année- Mathématiques
04 Novembre 2011

Devoir surveillé

Durée 2h15. Documents et calculatrice interdits.

Exercice 1.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites de fonctions. On appelle suite de fonction une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction à valeurs réelles. Si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge on définit la fonction :

$$\begin{aligned} f : & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

On notera alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$.On se propose d'étudier la continuité de la fonction f ainsi définie

1. Dans cette question nous étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est-elle continue ? Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(0)$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(1)$.
   (b) Soit $x \in [0,+\infty[$ calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$.
   (c) La fonction f $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n$ est elle continue ?
2. Dans cette question nous étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est-elle continue ?
   (b) La fonction $g = \lim_{n\longrightarrow+\infty} g_n$ est elle continue ?

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$. On dit alors que (f_n) converge uniformément vers f sur un intervalle I si et seulement si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

3. Soit $0 < a < 1$ montrer que la suite de fonctions $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction à déterminer.
4. Montrer que la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0,1]$.
5. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I, telle que (f_n) converge uniformément vers une fonction f. Montrer que f est continue sur I.