# Devoir surveillé - Algèbre Générale

Durée 1h30. Documents et calculatrice interdits.

*Le barème indiqué est indicatif, il sera susceptible d'être légèrement modifié. Une attention particulière sera accorder à la rédaction*

**Exercice 1. [5 pts]** Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Soient $P$ et $Q$ deux parties de $F$. Montrer que l'on a l'égalité,
$$f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q).$$
2. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, montrer que
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
3. Après avoir rappelé la définition de l'injectivité, montrer que dans le cas où $f$ est injective, on a :
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
4. Dans cette question on prend $E = F = \mathbb{R}$ et $f$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.
   (a) La fonction $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (b) Trouver deux parties $A$ et $B$ telles que :
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

**Exercice 2. [5 pts]** Soit $E = \mathbb{R}^2$, on définit sur $E$ la relation :
$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \,|\, (x, y) = k \cdot (x', y')$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 c'est-à-dire
$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in E, \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$$
   Montrer que $\forall v = (x, y) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, il existe deux points $u = (x', y')$ et $w = (x'', y'')$ de $\mathcal{C}$ tels que
$$w, u \in \overline{v} \quad et \quad y' \geq 0,\, y'' \leq 0$$
3. En déduire $E \setminus \{(0, 0)\}/\mathcal{R}$

**Exercice 3. [5 pts]**Soit $(G, \times)$ un groupe de neutre $e$ tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$ (où $x^2 = x \times x$, par ailleurs on pourra noté $xy$ pour $x \times y$).

1. Rappeler la définition d'un groupe, puis la définition d'un groupe abélien.
2. $\forall x \in G$ calculer $x^{-1}$.
3. Soient $(x, y) \in G^2$ calculer $(xy)^2$.
4. En déduire que $G$ est abélien.

**Exercice 4. [5 pts]**

1. Exhiber tous les éléments de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{\times}$.
2. Après avoir rappeler la définition de l'ordre d'un élément calculer l'ordre de chaque élément du groupe $G = ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{\times}, \times)$.
3. Dans cette question on montre qu'il n'existe pas d'isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{\times}, \times)$. Supposons qu'un tel isomorphisme $\phi$ existe.
   (a) Que dois vérifier un morphisme $\phi$ de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{\times}, \times)$. Même question pour un isomorphisme ?
   (b) Calculer $\phi(0)$. Quelles sont les possibilités pour $\phi(1)$. Dans chaque cas calculer $\phi(2)$ et aboutir à une contradiction.