CPP 1 ère année- Mathématiques
À rendre le 4 Novembre 2011

# Devoir Maison

*Profiter de ce devoir pour vous entrainer à rédiger correctement vos réponses*

Problème **Fonction Lipschitzienne**

Soit $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a alors la définition suivante :
$f$ est **k-lipschitzienne** si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$$

où $k$ est un réel strictement positif.

On dit que $f$ est **lipschitzienne** si il existe $k$ tel que $f$ est $k-lipshcitzienne.$

1. (a) Soit $A > 0$ montrer que la fonction définie sur $I = [A, +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{A}}$-lipschitzienne.

   *On a le calcul suivant (déjà fait en TD), soient $(x,y) \in I^2$ :*

   $$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{A}}$$

   *et donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{A}}$-lipschitzienne.*

   (b) Soit $a < b$ deux réels, montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est $k$-lipschitzienne sur tout $I = [a,b]$ , mais pas sur $\mathbb{R}$.

   *Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur $I$. Soient $(x,y) \in I^2$ on a alors :*

   $$\left|x^2 - y^2\right| = |x+y|\,|x-y| \leq (|x| + |y|)\,|x-y| \leq 2\max(|a|,|b|)|x-y|.$$

   *Ainsi $x \mapsto x^2$ est $2\max(|a|,|b|)$-lipschitzienne. Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y$, on a alors :*

   $$\frac{|x^2-y^2|}{|x-y|} = |x+y|$$

   *Il est clair que la quantité de droite ne peut être majorée et donc celle de gauche non plus et la fonction ne peut être lipschitzienne.*

(c) Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions lipschitziennes, montrer que $f_1+f_2$ est lipschitziennes. Le produit $f_1 f_2$ est il une fonction lipschitzienne ?

*Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I$, il existe alors $k_1$ et $k_2$ deux réels strictement positif tels que $\forall (x,y) \in I^2$ on a*

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq |x-y|, \qquad \textit{pour } i = 1, 2.$$

*On a donc*

$$\begin{aligned} |(f_1+f_2)(x) - (f_1+f_2)(y)| &\leq |f_1(x) - f_1(y) + f_2(x) - f_2(y)| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \\ &\leq k_1 |x-y| + k_2 |x-y| \\ &\leq (k_1+k_2) |x-y| \end{aligned}$$

*Ainsi $f_1 + f_2$ est lipschitzienne. Il est clair que la fonction $f : x \mapsto x$ est $1-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, or la fonction $f^2 : x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Ainsi le produit de deux fonctions lipschitzienne n'est pas nécessairement lipschitzienne.*

(d) Soit $f$ et $g$ deux fonctions $k$(resp $k'$)-lipschitziennes sur $I_1$ et $I_2$ telles que $f(I_1) \subset I_2$, montrer $g \circ f$ est lipschitzienne.

*Soit $(x,y) \in I_1^2$ on a alors*

$$|g \circ f(x) - g \circ f(y)| \leq k' |f(x) - f(y)| \leq k'k|x-y|$$

*Ainsi $g \circ f$ est $k'k-$lipschitzienne.*

2. Soit $f$ une fonction lipschitzienne sur $I$, montrer que $f$ est uniformément continue.

*Soit $k > 0$ une réel tel que*

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

*Soit $\varepsilon > 0$ un réel, l'égalité ci dessus entraine*

$$\forall (x,y) \in I^2 \left( |x-y| \leq \eta \left( = \frac{\varepsilon}{k} \right) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \right).$$

*Ainsi la fonction $f$ est uniformément continue.*

3. Étudier la réciproque de la question précédente.

   *La réciproque est fausse, pour le prouver exhibons un contre exemple. Soit* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0,1]$, *la fonction* $f$ *étant continue sur* $[0,1]$ *le théorème de Heine nous permet d'affirmer que la fonction* $f$ *est uniformément continue sur* $[0,1]$. *En revance il est clair au vu de la relation*

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$$

   *que la fonction* $f$ *n'est pas lipschitzienne sur* $[0,1]$

4. Soient $a < b$ deux nombres réels et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}_1$ sur $I = [a,b]$, montrer que $f$ est *lipschitzienne*. (Indication : On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

   *Soit* $(x,y) \in I^2$ *le théorème des accroissements finis entraine l'existence d'un réel* $c \in ]x,y[$ *tel que*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y|$$

   *La fonction* $f'$ *étant continue elle est bornée sur* $[a,b]$ *(et atteint ses bornes) ainsi il existe un réel* $M$ *tel que* $|f'(c)| \leq M$, *ainsi* $f$ *est lipschitzienne.*

5. Soit $a < b$ deux réels, $I = [a,b]$, et $f$ une fonction k-lipschitzienne sur $I$ tel que $f(I) \subset I$.
   (a) Montrer que f admet un point fixe sur I.
   (b) Si $k < 1$ on dit que $f$ est **contractante**. Montrer que si f est contractante $f$ admet un unique point fixe. À-t-on unicité du point fixe si $f$ est $1-$lipschitzienne ?
   (c) Soit $f$ une fonction contratante sur $I$, on suppose de plus que $0 \in I$, $f(0) = 0$.
      i. Montrer que la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
      ii. Montrer que $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.