CPP – Mathématiques
2011-2012

Feuille d'exercice : Algèbre Générale-Ensemble

Exercice 1. Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$, trouver deux parties F et G incluse dans A telles que :

1. $(F \setminus G) \cup G = F$.
2. $(F \setminus G) \cup G \neq F$.

Exercice 2. Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E montrer l'implication :

$$A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$$

Étudier la réciproque.

Exercice 3. Soient E un ensemble et A, B et C trois sous ensemble de E tels que :

$$A \cup B \subset A \cup C, \qquad A \cap B \subset A \cap C.$$

Montrer que $B \subset C$

Exercice 4. Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E montrer que :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Exercice 5. Soient E un ensemble et A, B et C trois sous ensemble de E montrer que :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Exercice 6. Soient E un ensemble et A, B et C trois sous ensemble de E montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$$

Exercice 7. Soit E un ensemble ; on définit alors : $\forall (A; B) \in \mathcal{P}(E); A * B = A^c \cap B^c$. Montrer que A^c, $A \cup B$ et $A \cap B$ s'expriment l'aide du seul symbole $*$ (et éventuellement de parenthèse).

Exercice 8. Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}$ et $A_0, A_1, \ldots A_n$ des parties de E telles que :

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = E$$

avec $\forall k \in [\![0, n-1]\!], A_k \neq A_{k+1}$. On note alors :

$$B_k = A_k \setminus A_{k-1} \qquad k \in [\![1, n]\!].$$

Montrer que $\{B_1, \dots B_n\}$ est une partition de E.

Exercice 9. Soit E un ensemble a n éléments et $p \geq 2$ un nombre entier, déterminer $|E^p|, |\mathcal{P}(E)|$ et $|\mathcal{P}(E^p)|$ (où $|A|$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble A).

Exercice 10. [Différence symétrique] Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, le sous ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\, x \notin A \cap B\}$$

1. Écrire $A\Delta B$ en fonction de $A \cup B$ et $A \cap B$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, $A\Delta A^c$.
4. Soient A, B, C trois sous ensemble de E, montrer que :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\, \Delta\, (B \cap C)\,.$$

A-t-on

$$(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\, \Delta\, (B \cup C)?$$

CPP – Mathématiques
2011-2012

Feuille d'exercices : Algèbre Générale-Applications

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Calculer les ensembles suivants :

$$f([-2,2]),\ f([-1,2]),\ f^{-1}([0,4]),\ f^{-1}([-2,4])\ \text{ et }\ f^{-1}([-2,-1]).$$

Exercice 2.

Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(x,y) \longrightarrow x^2 + y^2 \end{aligned}$$

1. Calculer les images de $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.
2. Calculer $f(A)$, où A est égale à :
   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
   (b) $A = \mathbb{R} \times \{0\}$.
   (c) $A = [0,1] \times [-2,3]$.
3. Calculer les images réciproques $f^{-1}(B)$, où B est égale à :
   (a) $B = \{0\}$.
   (b) $B = \{1\}$.
   (c) $B =]-1,1]$.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $A, B \subset E$ et $f : E \mapsto F$. Montrer que :
1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $A \in \mathcal{P}(E)$, $b \in \mathcal{P}(F)$ et $f : E \mapsto F$. Montrer que

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $A \subset E$ et $B \subset F$.
1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que l'inclusion peut être stricte.
2. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

Exercice 6. Soit f et g les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(x,y) \longrightarrow xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : &\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 \\ &x \mapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les applications f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 7. Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications, montrer que :

1. f et g injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective.
2. f et g surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ surjective.
3. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Longrightarrow f$ surjective.

Exercice 8. Soit E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ On définit f l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : & E \setminus \emptyset \longmapsto \mathbb{N} \\ & A \longmapsto \sum_{x \in A} x \end{aligned}$$

et $f(\emptyset) = 0$.

1. Calculer $f(\llbracket 0, n \rrbracket)$.
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

Exercice 9. Soient E et F deux ensembles et φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) & \longmapsto & \mathcal{P}(E \times F) \\ (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

φ est -elle surjective ? injective ?