Groupe fondamental étale des schémas

Matthieu Romagny

Rencontre ANR ARIVAF, 9–11 mars 2011, Bordeaux

1 Motivation : groupe fondamental et revêtements

1.1 En topologie

En topologie, à tout espace connexe X « raisonnable » (i.e. localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe), on sait associer un revêtement universel $\widetilde{X}$. Si on choisit un point $x \in X$, on a un groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ dont les éléments sont les classes d'homotopie de lacets basés en x et la loi de groupe est la concaténation. Le groupe des automorphismes du revêtement universel s'identifie naturellement avec $\pi_1(X,x)$.

Revêtements connexes et sous-groupes de π_1. En associant à un revêtement connexe pointé $f:(Y,y)\to(X,x)$ le sous-groupe $f_*\pi_1(Y,y)$, on obtient une équivalence entre la catégorie des revêtements connexes pointés de (X,x) et l'ensemble (vu comme catégorie) des sous-groupes de $\pi_1(X,x)$. Voici un foncteur inverse : à un sous-groupe $H\subset\pi_1(X,x)$, on associe le revêtement quotient $\widetilde{X}/H$. En associant à un revêtement connexe $f:Y\to X$ la classe de conjugaison de $f_*\pi_1(Y,y)$, indépendante du choix d'un y, on a une équivalence entre la catégorie des revêtements connexes de X et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X,x)$.

Revêtements et monodromie. Pour tout revêtement $f:Y\to X$, la fibre $Y_x=f^{-1}(x)$ est munie d'une action de $\pi_1(X,x)$ par *monodromie*. Celle-ci se décrit ainsi : par la propriété de relèvement des chemins, si $g=[\gamma]$ est la classe d'homotopie d'un lacet $\gamma:[0,1]\to X$ basé en x, pour tout $y\in f^{-1}(x)$ il existe un unique chemin $\widetilde{\gamma}:[0,1]\to Y$ tel que $\widetilde{\gamma}(0)=y$ et $f\circ\widetilde{\gamma}=\gamma$. On pose alors $g.y=\widetilde{\gamma}(1)$. En associant à un revêtement $f:Y\to X$ la fibre $f^{-1}(x)$, on obtient une équivalence entre la catégorie des revêtements de X et la catégorie des ensembles avec action de $\pi_1(X,x)$. Voici un foncteur inverse : à un $\pi_1(X,x)$-ensemble E, on associe le produit contracté, quotient de $\widetilde{X}\times E$ par $\pi_1(X,x)$ agissant diagonalement. La restriction aux revêtements connexes est une équivalence avec la sous-catégorie des ensembles avec action *transitive* de $\pi_1(X,x)$.

Revêtements galoisiens. Un revêtement est dit *galoisien* si l'action de son groupe d'automorphismes sur la fibre en x est *transitive*. Le revêtement universel $\widetilde{X}$ est galoisien. Le revêtement $\widetilde{X}/H\to X$ est galoisien ssi H est distingué dans $\pi_1(X,x)$, et son groupe d'automorphismes est alors $\pi_1(X,x)/H$. En particulier, les revêtements galoisiens sont cofinaux parmi tous les revêtements : le revêtement $\widetilde{X}/H$ est dominé par $\widetilde{X}/N$ où $N=\cap_{g\in\pi_1}gHg^{-1}$ est le plus grand sous-groupe distingué de $\pi_1(X,x)$ inclus dans H.

1.2 En géométrie algébrique

En géométrie algébrique, si l'on souhaite définir des analogues des objets ci-dessus, la situation est la suivante. La topologie des schémas n'est pas « raisonnable ». Il n'y a pas de notions naturelles souples de lacet et d'homotopie. En revanche, comme Grothendieck l'a vu, il existe des morphismes qui ont des propriétés formelles suffisamment proches de celles des revêtements pour que la catégorie de ces morphismes vers un schéma pointé (X,x) détermine, via le foncteur « fibre en x », une bonne partie du π_1 topologique. Ces morphismes sont les morphismes finis et étales, appelés *revêtements étales*. Ils sont à fibres finies et donc ne déterminent que les quotients finis, donc la limite inverse des quotients finis du π_1 i.e. le complété profini $\widehat{\pi}_1$.

Nous ne rappelons pas la définition des morphismes finis et étales. Notons que si X est un schéma, tout morphisme entre X-schémas finis est fini et tout morphisme entre X-schémas étales est étale. Quelques exemples :

1- une immersion ouverte et fermée $X \to X \amalg Y$,

2- le revêtement trivial $X \amalg X \to X$,

3- le morphisme $\mathrm{Spec}(\ell) \to \mathrm{Spec}(k)$ induit par une extension finie séparable de corps ℓ/k,

4- sur un corps k, $f : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ défini par $f(x) = x^n$ avec n premier à $\mathrm{car}(k)$,

5- sur un corps k de car. $p > 0$, $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ défini par $f(x) = x^p - x$,

6- le revêtement étale double de la cubique nodale,

7- l'endomorphisme $n : A \to A$ dans une variété abélienne avec n premier à $\mathrm{car}(k)$,

8- la factorisation de Stein d'un morphisme propre, plat, de présentation finie et à fibres géométriquement réduites,

9- si $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou $X = \mathbb{P}^n_k$, il n'y a pas de revêtement étale non trivial.

2 Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois

2.1 Rappels sur les groupes profinis

Un groupe profini est un groupe topologique qui est limite projective de groupes finis munis de la topologie discrète. Un tel groupe est compact et totalement discontinu ; réciproquement tout groupe topologique compact totalement discontinu est profini. Dans un groupe profini, les sous-groupes ouverts sont les sous-groupes fermés d'indice fini ; les sous-groupes ouverts distingués forment une base de voisinages du neutre. L'action d'un groupe profini sur un ensemble fini est continue si et seulement si elle se fait au travers d'un quotient discret. Remarque : on ne sait que depuis peu de temps que dans un groupe profini topologiquement de type fini, tous les sous-groupes d'indice fini sont ouverts (Nikolov et Segal, *On finitely generated profinite groups I-II*, Ann. of Math. 2007).

2.2 Rappels catégoriques

Foncteurs exacts à gauche. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $D = \{\, X \xrightarrow{\alpha} Y \overset{\beta,\gamma}{\rightrightarrows} Z \,\}$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C} = \mathcal{E}ns$, on dit que le diagramme est *exact* ssi α induit une bijection de X avec l'ensemble des $x' \in X'$ tels que $\beta(x') = \gamma(x')$. En général, on dit que le diagramme est *exact* ssi il l'est au niveau des foncteurs de points, c'est-à-dire si $D(T) = \{\, X(T) \longrightarrow Y(T) \rightrightarrows Z(T) \,\}$ est exact pour tout T, où $X(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$. On dit aussi que α est un *noyau* de (β, γ). Il est équivalent de dire que : dans $\mathcal{C}$ les limites projectives finies (i.e. indicées par des ensembles finis) existent, ou que : $\mathcal{C}$ possède un objet terminal et les produits fibrés de deux objets au-dessus d'un troisième. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories avec limites projectives finies, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. On dit que F est *exact à gauche* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(1) F commute aux limites projectives finies,

(2) F commute aux objets terminaux et aux produits fibrés,

(3) F commute aux produits finis et aux diagrammes exacts de la forme D ci-dessus.

Dualement, on a des notions de diagrammes exacts de la forme $X \longleftarrow Y \leftleftarrows Z$ et de foncteurs exacts à droite entre catégories avec limites inductives finies.

Épimorphismes stricts. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits fibrés. On dit qu'un épimorphisme $\alpha : X' \to X$ est *strict* si le diagramme $X \longleftarrow X' \leftleftarrows X' \times_X X'$ est exact. On peut vérifier en exercice qu'un épi strict qui est un mono est un iso. Dualement, dans une catégorie avec sommes amalgamées, on a la notion de monomorphisme strict.

Quotients catégoriques. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $X \in \mathcal{C}$ et $G \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ un sous-groupe. Pour tout $Y \in \mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est muni d'une action de G par $g.f = f \circ g^{-1}$ et on peut définir un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ par

$$F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)^G.$$

Si ce foncteur est représentable, on note X/G l'objet qui le représente, bien défini à isomorphisme unique près, et on l'appelle le *quotient catégorique de X par G.*

La procatégorie. Dans une catégorie $\mathcal{C}$, un *pro-objet* est un système projectif $X = (X_i)_{i\in I}$ indicé par un ensemble préordonné filtrant non spécifié. On définit une catégorie $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ dans laquelle l'ensemble des morphismes entre $X = (X_i)_{i\in I}$ et $Y = (Y_j)_{j\in J}$ est

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(X,Y) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

Comme tout objet de $\mathcal{C}$ définit un pro-objet constant, la catégorie $\mathcal{C}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Un foncteur covariant ou contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}ns$ est dit *pro-représentable* lorsqu'il est représentable par un objet de $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$.

2.3 Catégories galoisiennes

On note $\mathcal{E}$ la catégorie des ensembles finis.

Définition. Une *catégorie galoisienne* est une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ telle que :

(G1) $\mathcal{C}$ possède un objet terminal et les produits fibrés,

(G2) $\mathcal{C}$ possède un objet initial, les sommes disjointes finies, et les quotients par des groupes finis d'automorphismes,

(G3) tout morphisme $u : Y \to X$ dans $\mathcal{C}$ se factorise $Y \twoheadrightarrow Y' \hookrightarrow X$ en un épi strict suivi d'un mono qui est un iso sur un sommande direct de X,

et telle qu'il existe un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ vérifiant les propriétés :

(G4) F est exact à gauche,

(G5) F commute aux sommes disjointes finies, envoie les épi stricts sur des épi, et commute aux quotients par des groupes finis,

(G6) tout morphisme u dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)$ est un iso est un iso.

Un foncteur F comme dans la définition est appelé un *foncteur fibre*. La propriété (G6) s'énonce en disant que F est *conservatif* pour les iso.

Les propriétés des morphismes finis et des morphismes étales de schémas impliquent que la catégorie des revêtements étales d'un schéma connexe X est galoisienne, si on la munit du foncteur fibre en un point géométrique fixé $\mathrm{Spec}(\Omega) \to X$.

Un autre exemple est donné par la catégorie $\mathcal{C}(\pi)$ des ensembles finis muni d'une action continue d'un groupe profini π fixé, avec le foncteur $F : \mathcal{C}(\pi) \to \mathcal{E}$ donné par l'oubli de l'action.

2.4 Le théorème

Théorème. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie galoisienne munie d'un foncteur fibre F. Alors, il existe un groupe profini π, unique à isomorphisme unique près, tel que F se factorise en une équivalence de catégories $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\pi)$.*

Pour la preuve, on isole les objets *connexes* de $\mathcal{C}$ et parmi eux les objets *galoisiens*. On montre que F est pro-représentable par le système projectif $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ des objets galoisiens, qui joue le rôle du revêtement universel. Le groupe π est défini comme $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})^\circ$, de sorte que F applique dans $\mathcal{C}(\pi)$. Une équivalence inverse pour F est donnée par le foncteur $G : \mathcal{C}(\pi) \to \mathcal{C}$ qui envoie E sur le produit contracté $(E \times P)/\pi$, dont l'existence est à établir. Voici la preuve en 18 étapes.

Preuve (prendre son souffle). Nous ne suivons pas tout à fait SGA1, car dans *loc. cit.* la preuve de la pro-représentabilité de F fait appel à un résultat énoncé sans démonstration dans l'exposé Bourbaki 195 de Grothendieck. Il est plus intéressant de mettre en avant les objets connexes et leur rôle dans la pro-représentabilité de F.

a) *$u : Y \to X$ est un mono ssi $F(u)$ est un mono* (F est conservatif pour les mono). En effet, u est un mono ssi la diagonale $\Delta_u : Y \to Y \times_X Y$ est un iso ; on conclut avec (G6).

b) *$u : Y \to X$ est un épi strict ssi $F(u)$ est un épi strict* (F est conservatif pour les épi stricts) ; noter qu'épi strict = épi dans $\mathcal{E}$. En effet, si u est épi strict alors $F(u)$ est épi strict par (G5). Si $F(u)$ est épi, notons $Y \twoheadrightarrow Y' \hookrightarrow X$ la factorisation de (G3), où $Y \to Y'$ est un épi strict et $u' : Y' \to X$ est un iso sur un sommande direct de X. Comme $F(u)$ est un épi alors $F(u')$ aussi. Par ailleurs $F(u')$ est un mono d'après a), donc c'est un iso, donc u' aussi par (G6). Donc u est un épi strict.

c) *Tout objet de $\mathcal{C}$ est artinien.* Une suite de mono $\ldots \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_0$ donne une suite de mono $\ldots \hookrightarrow F(X_2) \hookrightarrow F(X_1) \hookrightarrow F(X_0)$. Comme $F(X_0)$ est fini, cette suite stationne, donc la suite X_n stationne d'après (G6).

Objets connexes. On écrit $X = \emptyset$ pour dire que X est un objet initial de $\mathcal{C}$, et on dit aussi que X est *vide*. On objet $P \in \mathcal{C}$ est dit *connexe* s'il n'est pas somme disjointe de deux objets non vides. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des revêtements étales d'un schéma, c'est la notion de connexité géométrique.

d) *P est connexe ssi tout mono d'un objet non vide vers P est un iso.* Si P est connexe, soit X non vide et $u : X \to P$ un mono factorisé en $X \twoheadrightarrow P' \hookrightarrow P$ comme dans (G3). Comme $X \to P'$ est un épi strict avec X non vide, alors P' est non vide. Comme $P' \hookrightarrow P$ est un iso sur un sommande direct de P connexe, il s'ensuit que c'est un iso. Alors u est un mono et un épi strict, c'est un iso. Réciproquement si $P = X \amalg Y$ avec X non vide alors le morphisme $X \hookrightarrow P$ qui est un mono d'après a), est un iso par hypothèse. Il suit de (G6) que Y est vide.

e) *Tout objet non vide est somme disjointe finie d'objets connexes non vides, uniques à l'ordre près.* En utilisant la propriété artinienne c) et une récurrence utilisant la factorisation de (G3), on voit facilement que de telles sommes disjointes existent. Pour l'unicité, supposons que $X = P_1 \amalg \cdots \amalg P_r = Q_1 \amalg Q_s$ et montrons que chaque P_i est isomorphe à un Q_j. Comme $F(X)$ est somme des $F(Q_j)$, il existe un j tel que $F(P_i)$ rencontre $F(Q_j)$. Alors d'après (G4) on a $F(P_i \times_X Q_j) = F(P_i) \cap F(Q_j)$ qui est non vide. Il s'ensuit que $P_i \times_X Q_j$ est non vide. Comme les projections vers les deux facteurs sont des mono (pullbacks des mono $P_i \hookrightarrow X$ et $Q_j \hookrightarrow X$) vers des connexes, ce sont des iso par d). Donc $P_i \simeq Q_j$.

Domination par des connexes et pro-représentabilité de F. On dit que X *domine* Y s'il existe un morphisme $X \to Y$. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des revêtements étales d'un schéma, ce n'est pas la notion de domination géométrique, car X domine $X \amalg X$. Un objet pointé est un (X, x) avec $X \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X)$. Si $u : X \to Y$ est un morphisme, on notera $u(x)$ au lieu de $F(u)(x)$. Les notions de morphisme d'objet pointés et de domination sont claires.

f) *Pour tous* (P, p) *et* (X, x) *avec* P *connexe, il existe au plus un morphisme* $u : (P, p) \to (X, x)$. Si u, v sont deux tels morphismes, notons $i : Y \to P$ leur noyau, qui existe d'après (G1). D'après (G4) le morphisme $F(i) : F(Y) \to F(P)$ est le noyau de $F(u)$ et $F(v)$. Par hypothèse $F(p) \in F(Y)$, donc $F(Y) \neq \emptyset$ puis $Y \neq \emptyset$. Comme P est connexe, le mono i est un iso, donc $u = v$.

g) *Pour tout ensemble fini d'objets pointés* $(X_1, x_1), \dots, (X_r, x_r)$*, il existe* (P, p)*, avec* P *connexe, qui domine chaque* (X_i, x_i). En considérant $X = X_1 \times \cdots \times X_r$ et $x = (x_1, \dots, x_r)$, on se ramène à dominer simplement (X, x). Soit $X = P_1 \amalg \cdots \amalg P_r$ la décomposition en composantes connexes, comme dans e). Comme $F(X)$ est somme des $F(P_i)$, il existe j tel que $x \in F(P_j)$ et on prend $P = P_j$.

h) *Pour tout objet* X*, il existe* (P, p) *avec* P *connexe dominant* X *tel que le morphisme d'évaluation* $\mathrm{ev}_p : \mathrm{Hom}(P, X) \to F(X)$*, qui envoie* u *sur* $u(p)$*, est bijectif. Soit* I *l'ensemble préordonné filtrant des classes d'iso des connexes pointés* (P, p) *et* $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I} \in \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$*, alors on a un iso de foncteurs* $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \cdot) = \varinjlim \mathrm{Hom}(P, \cdot) \to F$. Pour la première assertion il suffit d'écrire $F(X) = \{x_1, \dots, x_r\}$ et d'appliquer g) aux paires (X, x_i). La surjectivité est claire et l'injectivité découle de f). La deuxième assertion est claire.

Compléments sur les connexes.

i) *Tout morphisme d'un objet non vide vers un connexe est un épi strict.* Ceci découle immédiatement de la factorisation de (G3).

j) *Si* $u : P \to X$ *est un épi strict avec* P *connexe alors* X *est connexe.* Écrivons $X = Y \amalg Z$ avec Y non vide. Soit $y \in F(Y)$ et $p \in F(P)$ au-dessus, qui existe puisque $F(u)$ est épi. D'après g) il existe (Q, q) avec Q connexe, qui domine (Y, y) et (P, p). D'après f) les composés $Q \to P \to X$ et $Q \to Y \to X$ qui envoient tous deux q sur y, coïncident. Or d'après h) le morphisme $Q \to P$ est un épi strict, donc le composé $Q \to P \to X$ aussi. Alors $Q \to Y \to X$ est un épi strict. En particulier $F(X) = F(Y)$, donc Z est vide.

k) *Si* P *est connexe alors* $\mathrm{Hom}(P, P) = \mathrm{Aut}(P)$. Si P est vide il n'y a rien à dire. Sinon soit $u : P \to P$ factorisé en $P \twoheadrightarrow P' \hookrightarrow P$ comme dans (G3). Alors $P' \neq \emptyset$ donc $P' \to P$ est un iso par d). Ainsi u est un épi strict, donc $F(u)$ est épi, donc iso car $F(P)$ est un ensemble fini, donc u est iso.

Objets galoisiens. D'après k) et f), pour tout P connexe les morphismes d'évaluation $\mathrm{ev}_p : \mathrm{Aut}(P) \to F(P)$ sont injectifs. On dit que P est *galoisien* si ev_p est bijectif, pour un quelconque p. Il est équivalent de dire que $\mathrm{Aut}(P)$ agit (simplement) transitivement sur $F(P)$.

l) *La décomposition dans (G3) est unique* au sens où si on a $u = i \circ f = j \circ g$, il existe un unique iso $\varphi : Z \to Z'$ faisant commuter le diagramme ci-contre. En effet, notons $Y \times_Z Y$ le carré fibré de Y au-dessus de Z et $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ ses deux projections.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[dd, "\varphi"] & \\ Y \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & & X \\ & Z' \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Comme f est épi strict, le diagramme $\mathrm{Hom}(Z, Z') \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, Z') \rightrightarrows \mathrm{Hom}(Y \times_Z Y, Z')$ est exact. Par ailleurs, on a $j \circ g \circ \mathrm{pr}_1 = u \circ \mathrm{pr}_1 = u \circ \mathrm{pr}_2 = j \circ g \circ \mathrm{pr}_2$ donc $g \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$ puisque j est mono. L'exactitude du diagramme précédent montre qu'il existe $\varphi : Z \to Z'$ tel que $g = \varphi \circ f$. En inversant les rôles de f et g, on trouve qu'il existe $\psi : Z' \to Z$ tel que $f = \psi \circ g$. En utilisant le fait que f et g sont épi, on trouve que φ et ψ sont des iso inverses.

m) *Pour tout P connexe, il existe $P' \to P$ avec P' galoisien et minimal pour ces propriétés.* Ce P' est donc unique à iso non unique près ; on l'appelle la *clôture galoisienne* de P. Nous montrerons ceci en trois étapes. On peut bien sûr supposer $P \neq \emptyset$.

m1) *Construction de P'.* Par h) on peut choisir (Q, q) avec Q connexe dominant P tel que l'évaluation $\mathrm{ev}_q : \mathrm{Hom}(Q, P) \to F(P)$ est bijective. Notons $F(P) = \{p_1, \dots, p_n\}$, $u_i : Q \to P$ l'unique morphisme tel que $u(q) = p_i$, $u : Q \to P^n$ le morphisme induit vers le produit n-uple, et $u = i \circ f_0 : Q \twoheadrightarrow P' \hookrightarrow P^n$ la factorisation de (G3).

m2) *P' est galoisien.* Utilisant g) on peut remplacer Q par un connexe qui le domine de sorte à assurer que (Q, q) domine tous les (P', a) avec $a \in F(P')$. Notons $a_0 = f_0(q)$, fixons $a \in F(P')$ et notons $f_a : Q \to P'$ l'unique morphisme tel que $f_a(q) = a$. En appliquant j) à p on voit que P' est connexe. Par i) on voit ensuite que f_a est un épi strict. Ceci implique que si $\mathrm{pr}_s \circ i \circ f_a = \mathrm{pr}_t \circ i \circ f_a$ pour des indices $1 \leq s, t \leq n$, alors $\mathrm{pr}_s \circ i = \mathrm{pr}_t \circ i$. Dans ce cas $u_s = \mathrm{pr}_s \circ i \circ f_0 = \mathrm{pr}_t \circ i \circ f_0 = u_t$, donc $s = t$. Ceci montre que les $\mathrm{pr}_s \circ i \circ f_a$ sont tous distincts, donc $\mathrm{Hom}(Q, P) = \{\mathrm{pr}_1 \circ i \circ f_a, \dots, \mathrm{pr}_n \circ i \circ f_a\}$ pour des raisons de cardinalité. Alors il existe une permutation σ telle que $\mathrm{pr}_s \circ i \circ f_0 = \mathrm{pr}_{\sigma(s)} \circ i \circ f_a$ pour tout s. En notant $\Sigma : P^n \to P^n$ le morphisme de permutation induit par σ, i.e. tel que $\mathrm{pr}_s \circ \Sigma = \mathrm{pr}_{\sigma(s)}$ pour tout s, ceci donne $\mathrm{pr}_s \circ i \circ f_0 = \mathrm{pr}_s \circ \Sigma \circ i \circ f_a$ pour tout s, ce qui implique que $i \circ f_0 = \Sigma \circ i \circ f_a$. D'après l'unicité de la décomposition (G3), il existe un unique $\varphi \in \mathrm{Aut}(P')$ faisant commuter le diagramme ci-contre. Alors $\varphi(a_0) = \varphi(f_0(q)) = f_a(q) = a$. Donc $\mathrm{Aut}(P')$ est transitif sur $F(P')$, qed.

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"] & \\
Q \arrow[ur, two heads, "f_0"] \arrow[dr, "f_a"'] & & P^n \\
& P' \arrow[ur, hook, "\Sigma\circ i"'] &
\end{tikzcd}$$

m3) *P' est minimal.* Soit Q galoisien et $f : Q \to P$ un morphisme. D'après i) c'est un épi, donc $F(f)$ aussi, donc pour chaque $s = 1, \dots, n$ on peut choisir q_s tel que $f(q_s) = p_s$. Comme P' est galoisien, il existe des auto $\varphi_s : P' \to P'$ tels que $\varphi_s(q_1) = q_s$. Notons $h = (f \circ \varphi_1, \dots, f \circ \varphi_n) : Q \to P^n$ le morphisme produit et $h = j \circ g : Q \twoheadrightarrow R \hookrightarrow P^n$ la factorisation (G3). Il suit de j) que R est connexe. Comme $h(q_1) = (p_1, \dots, p_n) \in P^n$, finalement R s'identifie à la composante connexe de ce point dans X^n, i.e. à P'.

Groupe fondamental π et foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\pi)$. Notons I l'ensemble préordonné filtrant des classes d'iso des objets galoisiens pointés (P, p) et $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I} \in \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$.

n) *On a un iso de foncteurs* $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \cdot) \to F$, *et* $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \varprojlim \mathrm{Aut}(P_i) = \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$ *est muni d'une structure naturelle de groupe profini.* La première assertion résulte de l'existence de la clôture galoisienne, qui montre que les galoisiens forment un sous-ensemble cofinal de l'ensemble I du point h). La seconde assertion résulte du fait que pour i fixé on a $\varinjlim_j \mathrm{Hom}(P_j, P_i) = \mathrm{Hom}(P_i, P_i)$ car dans la limite inductive n'interviennent que les P_j qui dominent P_i, parmi lesquels P_i est terminal. Donc $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(P_j, P_i) = \varprojlim_i \mathrm{Hom}(P_i, P_i) = \varprojlim_i \mathrm{Aut}(P_i)$. Le reste est clair.

o) *F définit un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\pi)$, où π est le groupe opposé de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$. Car $F(X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{P}, X)$ est muni d'une action à droite de $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$, i.e. d'une action à gauche de π.

Produit contracté et foncteur $G : \mathcal{C}(\pi) \to \mathcal{C}$. Soient G un groupe fini ou profini, X un objet ou pro-objet de $\mathcal{C}$ muni d'une action à droite de G, et E un ensemble fini avec action à gauche continue de G. On considère le foncteur covariant sur $\mathcal{C}$ défini par $Y \mapsto \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Hom}(X, Y))$. S'il est représentable, on note $X \times_G E$ et on appelle *produit contracté* un objet qui le représente.

p) *Si G est fini et $X \in \mathcal{C}$, le produit contracté $X \times_G E$ existe et l'application naturelle $F(X) \times_G E \to F(X \times_G E)$ est un iso.* Un élément de $\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Hom}(X, Y))$ est une collection $f = (f_e : X \to Y)_{e \in E}$ de morphismes tels que $f_{eg} = f_e \circ g$. Si G est transitif sur E, fixons $e_0 \in E$ et H son stabilisateur. Alors f est déterminé par le morphisme H-équivariant f_{e_0}, donc $\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Hom}(X,Y)) = \mathrm{Hom}_H(X,Y) = \mathrm{Hom}(X/H, Y)$ et $X \times_G E = X/H$. Dans le cas général E est somme de ses orbites E_i et $X \times_G E$ est somme des $X \times_G E_i$. L'application naturelle $F(X) \times_G E \to F(X \times_G E)$ est celle construite en faisant $Y = X \times_G E$, et c'est un iso car F commute aux quotients par (G5).

q) *Si $E \in \mathcal{C}(\pi)$, le produit contracté $G(E) := \mathcal{P} \times_\pi E$ existe.* Soit i tel que l'action de π sur E se fait à travers $\pi_i = \mathrm{Aut}(P_i)$. Alors $P_i \times_{pi_i} E$ existe d'après p) et on vérifie facilement qu'il représente le foncteur qui définit $\mathcal{P} \times_\pi E$.

r) *Les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\pi)$ et $G : \mathcal{C}(\pi) \to \mathcal{C}$ sont des équivalences inverses.* Considérons l'isomorphisme canonique et fonctoriel $\mathrm{Hom}_\pi(E, F(X)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{P} \times_\pi E, X)$. Pour $X = \mathcal{P} \times_\pi E$, l'identité à droite a pour image à gauche un isomorphisme $E \to F(\mathcal{P} \times_\pi E)$. Pour E variable, ceci définit un isomorphisme $\alpha : \mathrm{id} \to FG$. Pour $E = F(X)$, l'identité à gauche a pour image à droite un isomorphisme $\mathcal{P} \times_\pi F(X) \to X$. Pour X variable, ceci définit un isomorphisme $\beta : GF \to \mathrm{id}$.

3 Exemples

3.1 Un calcul de clôture galoisienne

Dans la catégorie des revêtements étales de $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, considérons $P = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ et calculons sa clôture galoisienne P' en suivant la méthode du point m) de la preuve. Si on veut suivre à la ligne, il faut trouver un Q connexe dominant P, ce qui en pratique revient presque au même que de connaître une clôture galoisienne. En fait, on n'en a pas besoin, car on peut identifier P' comme une composante connexe de P^n de degré maximal. Ici n est le nombre de points géométriques, i.e. $n = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, et P^3 est de degré 27 sur X. Il se trouve que P' apparaît déjà dans P^2, et nous allons donc économiser notre énergie en regardant les composantes connexes de P^2. On sait que P est présent, via la diagonale, et dans notre cas il n'y a qu'une autre composante, qui est celle qu'on cherche : $P^2 = P \amalg P'$. Vérifions par le calcul. Compte tenu de l'égalité d'idéaux dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$:

$$(\alpha^3 - 2, \beta^3 - 2) = (\alpha^3 - 2, \alpha^3 - \beta^3) = (\alpha^3 - 2, (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)),$$

on a :

$$P^2 = \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{Q}[\alpha]}{\alpha^3 - 2} \otimes \frac{\mathbb{Q}[\beta]}{\beta^3 - 2}\right) = \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{Q}[\alpha]}{\alpha^3 - 2}\right) \amalg \mathrm{Spec}\left(\frac{\mathbb{Q}[\alpha, \beta]}{\alpha^3 - 2, \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}\right).$$

Bien sûr, en posant $j = \beta/\alpha$ qui est une racine primitive troisième de l'unité, on reconnaît la clôture galoisienne $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, j)$.

3.2 Des exemples de catégories galoisiennes

1- la catégorie des revêtements finis, au sens topologique ordinaire, d'un espace connexe raisonnable (localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe).

2- la catégorie des algèbres finies séparables sur un corps k, cas particulier de la suivante.

3- la catégorie des revêtements finis étales d'un schéma connexe.

4- groupe fondamental modéré : soit X un schéma, $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux, $U = X \setminus D$. Alors, pour tout point géométrique $\overline{s} \in S$ et tout point $x \in D_{\overline{s}}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X_{\overline{s}},x}$ est un AVD. On dit qu'un revêtement (fini étale) $V \to U$ est *modérément* *ramifié le long de* D si pour tous $\overline{s}, x$ comme ci-dessus, la normalisation $\mathcal{O}_{X_{\overline{s}},x}$ dans l'algèbre de fonctions étale de V_x est modérément ramifiée sur $\mathcal{O}_{X_{\overline{s}},x}$. On montre que ces revêtements forment une catégorie galoisienne, donnant lieu au *groupe fondamental modérément ramifié de* (X, U) *relativement à* S. Cf SGA1, Exp. XIII, par. 2.

5- Abbes-Saito : pour définir une filtration de ramification pour les corps locaux à corps résiduel imparfait, Abbes et Saito démontrent le résultat suivant.

Proposition. *Soit* $(\mathcal{C}, F)$ *une catégorie galoisienne de groupe fondamental* π. *Soit* $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\pi)$ *un foncteur qui commute aux sommes disjointes finies. Soit* $F \to F'$ *un morphisme de foncteurs tel que :*

(1) $F(X) \to F'(X)$ *est surjectif pour tout* $X \in \mathcal{C}$,

(2) *pour tout* $X \to Y$ *tel que* $F(X) \to F(Y)$ *est surjectif, le diagramme suivant est co-cartésien :*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(Y) \arrow[d] \\ F'(X) \arrow[r] & F'(Y). \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{C}'$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{C}$ *des objets tels que* $F(X) \to F'(X)$ *est bijectif. Soit* ν *l'intersection des noyaux des actions de* π *sur les* $X \in \mathcal{C}'$. *Alors* $(\mathcal{C}', F')$ *est une catégorie galoisienne de groupe fondamental* π/ν, *et pour tout* $X \in \mathcal{C}$ *on a* $F(X) = F'(X)/\nu$.