Faisceaux constructibles

Rencontre ARIVAF 2 - Exposé (4), Cédric Pépin

Il s'agit essentiellement d'un exposé de définitions et propriétés de base. On insiste sur l'interprétation des faisceaux constructibles en termes d'espaces algébriques étales de présentation finie. On prouve la stabilité des faisceaux constructibles par image directe finie.

Le petit site étale d'un schéma X sera noté X_{et}. Dans toutes les sections sauf la dernière, on travaille avec des faisceaux *d'ensembles*.

1 Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Définition 1.1 (Faisceau constant, faisceau localement constant)**.** *Soit X un schéma.*

1. *Soit E un ensemble. Le* faisceau constant sur X_{et} de valeur E *est le faisceau associé au préfaisceau constant de valeur E. Un faisceau F sur X_{et} est* constant *s'il existe un ensemble E tel que F soit isomorphe au faisceau constant sur X_{et} de valeur E.*
2. *Un faisceau F sur X_{et} est* localement constant *s'il existe un recouvrement $\{U_i \to X\}_{i\in I}$ tel que pour tout $i \in I$, le faisceau restreint $F|_{U_i}$ soit constant.*

Ces deux types de faisceaux sont représentables :

Lemme 1.2. *Soit X un schéma.*

1. *Le faisceau constant sur X_{et} de valeur E est représentable par le X-schéma étale*
$$\coprod_{e\in E} X.$$
2. *Un faisceau localement constant sur X_{et} à valeurs locales* finies *est représentable par un X-schéma fini étale (i.e. un revêtement étale de X).*

Démonstration. Le point 1 résulte des définitions. Montrons le point 2. Si F est localement constant à valeurs locales finies, alors il existe un morphisme étale surjectif $X' \to X$ tel que le pull-back F' de F sur X'_{et} soit représentable par un X'-schéma fini étale (point 1). Provenant d'un faisceau sur X, le X'-schéma F' est muni d'une donnée de descente. Celle-ci est effective puisque F'/X' est affine. Il en résulte que le faisceau F est un schéma fini étale sur X. □

Rappelons qu'une partie *constructible* d'un espace topologique U est une réunion finie de parties de la forme $U_1 \cap (U \setminus U_2)$ avec U_1 et U_2 ouverts *rétrocompacts* de U, i.e. les immersions ouvertes $U_i \to U$ $(i = 1, 2)$ sont quasi-compactes.

Définition 1.3 (Faisceau constructible)**.** *Soient X un schéma et F un faisceau sur X_{et}. On dit que F est* constructible sur X *si pour tout ouvert affine U de X, la condition suivante est vérifiée :*

Il existe une famille finie surjective d'immersions $\{U_i \to U\}_{i\in I}$, dont les images sont des parties constructibles de U, et telles que pour tout $i \in I$ le faisceau restreint $F|_{U_i}$ soit localement constant, à valeurs locales finies.

D'après le lemme 1.2, la notion de faisceau constructible peut être vue comme une généralisation de celle de revêtement étale.

Lorsque *le schéma X est localement noethérien*, la condition de constructibilité dans la définition 1.3 est automatique. En effet : un ouvert d'un schéma localement noethérien U est toujours rétrocompact dans U, de sorte qu'alors toute partie localement fermée de U est constructible dans U.

Lorsque *le schéma X est quasi-compact quasi-séparé*, un faisceau F sur X_{et} est constructible si et seulement si il existe une famille finie surjective d'immersions $\{X_i \to X\}_{i \in I}$, dont les images sont des parties constructibles de X, et telles que pour tout $i \in I$ le faisceau restreint $F|_{X_i}$ soit localement constant, à valeurs locales finies. L'hypothèse de quasi-séparation sert à assurer que tout ouvert affine de X est rétrocompact dans X (cf. [A] Prop. 2.4 (i) pour la preuve détaillée).

Remarque 1.4. Pour construire des faisceaux constructibles, on peut utiliser la description des faisceaux sur le petit site étale d'un schéma X à partir d'une décomposition $X = U \cup Z$, où U est ouvert dans X de complémentaire Z (cf. exposé (3)).

1.2 Premières propriétés

Rappelons qu'une partie T d'un espace topologique X est *localement constructible* dans X si tout point de X possède un voisinage ouvert V tel que $T \cap V$ soit constructible dans V.

Proposition 1.5 ([A] Prop. 2.4)**.** *Soit X un schéma.*

1. *Pour un faisceau sur X_{et}, la propriété d'être constructible est Zariski locale sur X.*
2. *Soient $f : Y \to X$ un morphisme de schémas et F un faisceau constructible sur X. Alors f^*F est un faisceau constructible sur Y.*
3. *Soient F, G des faisceaux constructibles sur X, avec $F \subseteq G$. Alors l'ensemble des points de X où les fibres géométriques de F et G coïncident est localement constructible dans X.*

Proposition 1.6 ([A] Prop. 2.6)**.**

1. *Une limite projective finie de faisceaux constructibles est constructible. Cela s'applique en particulier aux produits, noyaux, produits fibrés.*
2. *Une limite inductive finie de faisceaux constructibles est constructible. Cela s'applique en particulier aux coproduits, conoyaux, coprdoduits fibrés.*

Application : si $F \to G$ est un morphisme de faisceaux constructibles, son image

$$\mathrm{Ker}(G \rightrightarrows G \coprod_F G)$$

est encore un faisceau constructible.

2 Lien avec les espaces algébriques

Définition 2.1 (Espace algébrique)**.** *Soit X un schéma. Un X-*espace algébrique *F est un faisceau sur le grand site étale de X, qui est quotient d'un X-schéma par une relation d'équivalence représentable étale.*

Il existe donc un X-schéma U, un X-schéma R, un X-monomorphisme

$$i : R \to U \times_X U$$

et un X-morphisme de faisceaux étales $p : U \to F$, tels que les conditions suivantes soient réalisées :

1. *$i : R \to U \times_X U$ est le graphe d'une X-relation d'équivalence sur U ;*
2. *les projections canoniques $\substack{q_2 \\ q_1} : R \xrightarrow{i} U \times_X U \rightrightarrows U$ sont des morphismes étales ;*
3. *(p, F) est un conoyau de la double flèche $\substack{q_2 \\ q_1} : R \rightrightarrows U$ dans la catégorie des faisceaux sur le grand site étale de X.*

Théorème 2.2 ([K] Chap. II Prop 1.3 a) et [RG] 5.7.2)**.** *Soient X un schéma et F un faisceau sur le grand site étale de X. Alors F est un X-espace algébrique si et seulement si il existe un X-schéma U et un morphisme de faisceaux étales $p : U \to F$ relativement représentable par morphismes étales surjectifs. Un tel p est appelé un* recouvrement étale représentable *de F.*

Pour décrire les faisceaux sur X_{et} en termes d'espaces algébriques, nous avons besoin de la notion d'espace algébrique *étale sur le schéma X*. Plus généralement ([K] Chap. II 3.2) :

Définition 2.3 (Morphisme étale)**.** *Un morphisme d'espaces algébriques $F \to G$ est* étale *s'il existe des recouvrements étales représentables $V \to G$ et $U \to F \times_G V$ tels que $U \to V$ soit étale.*

Le lemme de représentabilité 1.2 admet alors la généralisation suivante.

Lemme 2.4 ([M] Chap. V Th. 1.5)**.** *Soient X un schéma et F un faisceau sur X_{et}. Alors il existe un unique X-espace algébrique étale $\widetilde{F}$ tel que $\widetilde{F}|_{X_{et}}$ soit isomorphe à F.*

Démonstration. Remarquons d'abord le fait suivant :

pour tout $U_1,\ U_2 \in \mathrm{Ob}(X_{et})$, $s_1 \in F(U_1)$ et $s_2 \in F(U_2)$, le faisceau $U_1 \times_F U_2 \in (X_{et})^\wedge$ est représentable par un sous-schéma ouvert de $U_1 \times_X U_2$.

En effet, tout élément $(f_1, f_2) \in (U_1 \times_X U_2)(V)$ définit un X-morphisme

$$(f_1, f_2) : V \to U_1 \times_X U_2,$$

qui est *étale* puisque la source et le but sont étales sur X. L'image V_{f_1,f_2} de (f_1, f_2) est donc un ouvert de $U_1 \times_X U_2$, et le morphisme induit $V \to V_{f_1,f_2}$ est étale surjectif. Comme F est un faisceau, on a donc

$$f_1^*(s_1) = f_2^*(s_2) \Leftrightarrow (s_1|_{V_{f_1,f_2}})|_V = (s_2|_{V_{f_1,f_2}})|_V \Leftrightarrow s_1|_{V_{f_1,f_2}} = s_2|_{V_{f_1,f_2}},$$

c'est-à-dire, $(f_1, f_2) \in (U_1 \times_F U_2)(V)$ si et seulement si s_1 et s_2 coïncident sur V_{f_1,f_2}. Par conséquent, le faisceau $U_1 \times_F U_2$ est représenté par l'ouvert

$$\bigcup_{\substack{V \in \mathrm{Ob}(X_{\text{et}}) \\ (f_1,f_2) \in (U_1 \times_F U_2)(V)}} V_{f_1,f_2} \quad \subseteq \quad U_1 \times_X U_2.$$

Ce fait va nous servir de la façon suivante. Considérons le X-schéma étale

$$U := \coprod_{\substack{(V,s) \\ V \in \mathrm{Ob}(X_{\text{et}}),\ s \in F(V)}} V.$$

Le faisceau F possède une section canonique sur U, à savoir $c := \{s\}_{(V,s)}$, définissant un morphisme $c : U \to F$. D'après ce qui précède, le faisceau $R := U \times_F U$ est représentable par un sous-schéma ouvert de $U \times_X U$. Les projections $\substack{q_2 \\ q_1} : R \rightrightarrows U$ sont étales puisque les projections $U \times_X U \rightrightarrows U$ le sont. Le faisceau quotient de U par R dans la catégorie des faisceaux sur le grand site étale de X est donc un X-espace algébrique $\widetilde{F}$, étale par construction.

Pour voir que $\widetilde{F}|_{X_{\text{et}}}$ est isomorphe à F, on va construire des applications réciproques $F(V) \rightleftarrows \widetilde{F}(V)$, fonctorielles en $V \in \mathrm{Ob}(X_{\text{et}})$.

Partant de $s \in F(V)$, on obtient une immersion ouverte $V \to U$ dont l'image est la copie de V indexée par (V, s). Composant avec la projection $p : U \to \widetilde{F}$, on obtient un élément $\widetilde{s} \in \widetilde{F}(V)$.

Partant de $\widetilde{s} \in \widetilde{F}(V)$, c'est-à-dire d'un morphisme $V \to \widetilde{F}$, on le représente au niveau du recouvrement U par morphisme $\widetilde{s}' : V' \to U$, pour un certain $V' \to V$ étale surjectif. On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V' \times_V V' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{s}'"'] & V \arrow[d, "\widetilde{s}"] \arrow[ddl, dashed, "s"'] \\
R = U \times_F U \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr] & U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "c"'] & \widetilde{F} \\
& F &
\end{tikzcd}$$

où $s \in F(V)$ est fourni par la condition de faisceau sur F relative au recouvrement $V' \to V$.

Par définition de c, les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. De plus elles sont bien fonctorielles en $V \in \mathrm{Ob}(X_{\text{et}})$, ce qui achève de prouver que $\widetilde{F}|_{X_{\text{et}}} \simeq F$.

Reste à voir l'unicité de $\widetilde{F}$. Comme tout faisceau sur le grand site étale de X, le faisceau $\widetilde{F}$ se prolonge de manière unique sur la catégorie des X-espaces algébriques munie de sa topologie étale : si A est un X-espace algébrique, on choisit une présentation

$$R_A \rightrightarrows U_A \to A,$$

on définit $\widetilde{F}(A)$ comme le noyau de $\widetilde{F}(U_A) \rightrightarrows \widetilde{F}(R_A)$, et on vérifie que cela ne dépend pas du choix de la présentation. En particulier, ceci permet de voir $\widetilde{F}$ comme un foncteur représentable sur la catégorie $X_{\text{et,alg}}$ des X-espaces algébriques étales, et d'après le lemme de Yoneda, ce foncteur détermine uniquement $\widetilde{F}$ comme objet de $X_{\text{et,alg}}$. Pour conclure à l'unicité annoncée, il suffit donc de voir que ce foncteur est uniquement déterminé par F. Or, avec les notations précédentes, si A est étale sur X, alors U_A et R_A le sont aussi, si bien que $\widetilde{F}(U_A) = F(U_A)$, $\widetilde{F}(R_A) = F(R_A)$ et $\widetilde{F}(A)$ est le noyau de $F(U_A) \rightrightarrows F(R_A)$. $\square$

Par abus, on confondra désormais le faisceau F sur X_{et} et le X-espace algébrique étale $\widetilde{F}$ qui lui est associé. Signalons au passage le résultat de Knutson :

Théorème 2.5 ([K] Chap. II Cor. 6.17)**.** *Soient X un schéma et F un X-espace algébrique* étale séparé. *Alors F est un schéma.*

Pour caractériser les faisceaux constructibles parmi les espaces algébriques étales sur X, nous avons besoin des définitions suivantes ([K] Chap. II 3.2 et 2.7).

Définition 2.6 (Morphisme localement de présentation finie, morphisme quasi–compact)**.** *Soit $f : F \to G$ un morphisme d'espaces algébriques.*

1. *f est* localement de présentation finie *s'il existe des recouvrements étales représentables $V \to G$ et $U \to F \times_G V$ tels que $U \to V$ soit localement de présentation finie.*
2. *f est* quasi-compact *si pour tout morphisme étale $W \to G$ avec W schéma quasi-compact, l'espace algébrique $F \times_G W$ est quasi-compact, c'est-à-dire possède un recouvrement étale représentable par un schéma quasi-compact.*

Ces définitions permettent de dégager la notion clé de *présentation finie* (*loc. cit.* 3.3)) :

Définition 2.7 (Morphisme de présentation finie)**.** *Un morphisme d'espaces algébriques $F \to G$ est de* présentation finie *s'il est localement de présentation finie, quasi-compact, et si le morphisme diagonal $F \to F \times_G F$ est quasi-compact.*

Théorème 2.8 ([A] Prop. 2.7)**.** *Soient X un schéma et F un faisceau sur X_{et}. Alors F est constructible si et seulement si il est de présentation finie en tant que X-espace algébrique étale.*

Pour démontrer la suffisance, le résultat fondamental est le suivant.

Lemme 2.9 ([EGA IV]$_4$ 18.2.8 et [K] Chap. I Prop. 4.19)**.** *Soit $f : F \to X$ un morphisme de schémas, étale de présentation finie séparé. Alors il existe un ouvert dense $X' \subseteq X$ tel que $f^{-1}(X') \to X'$ soit* fini *étale.*

Démonstration du théorème 2.8. Montrons qu'un espace algébrique F étale de présentation finie sur X est constructible. Traitons d'abord le cas où $F \to X$ est un X-schéma étale de présentation finie séparé. Par définition, pour montrer que F est constructible, on peut supposer X affine. Il existe alors un morphisme $F_0 \to X_0$ étale de présentation finie séparé de schémas noethériens et un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ F_0 & \longrightarrow & X_0. \end{array}$$

([EGA IV] 8 et 17). Comme F_0 est étale sur X_0, le schéma F représente le pull-back de F_0 en tant que faisceau sur $(X_0)_{\mathrm{et}}$ [1]. D'après 1.5 2, il suffit donc de montrer que le faisceau $F_0 \in \mathrm{Ob}((X_0)_{\mathrm{et}})$ est constructible. Pour cela, on utilise 2.9 : il existe un ouvert dense X_0' de X_0 tel que F_0 soit fini étale, donc localement constant à fibres finies, au-dessus de X_0'. Posant $X_1 := (X_0 \setminus X_0')_{\mathrm{red}}$, on peut répéter le même argument pour $F|_{X_1}$, trouvant un X_1' et un X_2, respectivement ouverts et fermés dans X_1, donc constructibles dans X_0 noethérien. On construit ainsi une suite décroissante de sous-schémas fermés X_i de X_0, qui est stationnaire puisque X_0 est noethérien. Ceci achève la démonstration de la constructibilité dans le cas particulier envisagé. Dans le cas général, on peut encore supposer X affine. L'espace algébrique F est alors recouvert par un schéma U étale affine (donc de présentation finie séparé) sur X. Comme le carré

$$\begin{array}{ccc} R := U \times_F U & \xrightarrow{\delta} & U \times_X U \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & F \times_X F. \end{array}$$

est cartésien et que la flèche du bas est une immersion ouverte quasi-compacte par hypothèse, on obtient que R aussi est étale de présentation finie séparé sur X. Donc F est constructible comme conoyau de constructibles (1.6 2).

Supposons maintenant F constructible. Pour montrer qu'il est de présentation finie en tant que X-espace algébrique, on peut supposer X affine. Soit $U \to F$ un

1. En effet, pour tout $G \in \mathrm{Ob}(X_{\mathrm{et}})$, on a alors

$$\mathrm{Hom}_X(F, G) = \Gamma(F, G) = \Gamma(F_0, \varphi_* G) = \mathrm{Hom}_{X_0}(F_0, \varphi_* G)$$

d'où $F = \varphi^* F_0$ par unicité de l'adjoint.

recouvrement étale représentable, union disjointe de schémas affines U_i, $i \in I$, étales sur X. Pour tout $J \subseteq I$ fini, posons

$$U_J := \coprod_{j \in J} U_j \quad \text{et} \quad F_J := \mathrm{Im}(U_J) \subseteq F.$$

D'après le sens « suffisant » démontré ci-dessus, le X-schéma U_J est un faisceau constructible. Comme F est aussi constructible par hypothèse, il résulte de 1.6 que F_J est constructible. Puis, d'après 1.5 3, l'ensemble

$$X_J := \{x \in X \mid (F_J)_{\bar{x}} = F_{\bar{x}}\}$$

est localement constructible dans X. Maintenant, comme le faisceau constructible F est à fibres finies, la famille des X_J, pour J fini contenu dans I, recouvre X. Mais X est quasi-compact, donc un nombre fini de X_J suffit à recouvrir X ([EGA IV]$_1$ 1.9.9 (et 1.9.4)). L'union disjointe des U_J correspondants fournit un recouvrement étale représentable de F, qui est affine sur X. De plus, posons $R_J := U_J \times_F U_J$. C'est un faisceau constructible d'après 1.6 1. Et comme

$$\delta : R_J := U_J \times_F U_J \to U_J \times_X U_J$$

est une immersion ouverte (puisque la diagonale d'un espace algébrique étale est une immersion ouverte), le morphisme $R_J \to X$ est étale. Raisonnant avec

$$R_J \xrightarrow{\mathrm{Id}} R_J$$

comme avec $U \to F$, on en déduit que le schéma R_J est quasi-compact. Mais comme le schéma $U_J \times_X U_J$ est affine, ceci équivaut à dire que δ est un morphisme quasi-compact [EGA I] 6.6.1. Finalement, l'espace algébrique F est bien de présentation finie sur X. □

Remarque 2.10. Conservons les notations de la démonstration ci-dessus. Le morphisme $\delta : R_J \to U_J \times_X U_J$ est une immersion ouverte, et $U_J \to X$ est étale à fibres finies. Donc $R_J \to X$ est étale à fibres finies. Cependant, cela n'est pas suffisant pour conclure que $R_J \to X$ est de présentation finie. Il est donc essentiel ici de savoir *a priori* que R_J est un faisceau constructible sur X, pour montrer que c'est un schéma quasi-compact.

Voici un exemple de $\mathbb{Z}$-schéma en groupes étale à fibres finies, qui n'est pas de présentation finie ([ALB] Chap. 11 (2.10) p. 203). Pour p premier, on note G_p le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes obtenu en recollant p copies de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ le long de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - \{p\}$. Pour p et q premiers distincts, on recolle G_p et G_q le long de leurs sections unités. Soit G le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes obtenu en recollant les G_p pour tous les p premiers. Alors la projection $G_p \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ (donc aussi $G \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) est un isomorphisme local (pour la topologie de Zariski sur la source), à fibres finies. Mais les sections des $G_p \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ forment un recouvrement ouvert de G qui n'admet pas de sous-recouvrement fini.

Remarque 2.11. Pour un exemple d'espace algébrique étale $F \to X$ qui n'est pas un schéma, on pourra consulter le Stack Project de De Jong, exemple 36.14.2

Le lemme 2.4 et le théorème 2.8 permettent d'étendre aux faisceaux sur X_{et} certaines propriétés de la catégorie des schémas. En voici un premier exemple :

Proposition 2.12. *Soient X un schéma localement noethérien et F un faisceau constructible sur X. Alors tout sous-faisceau de F est constructible.*

Démonstration. Soit F' un sous-faisceau de F. Alors le monomorphisme canonique $F' \to F$ de X-espaces algébriques étales est étale. C'est donc une immersion ouverte, nécessairement quasi-compacte puisque X est localement noethérien. On en déduit que $F' \to X$ est quasi-compact, et donc de présentation finie puisque X est localement noethérien. □

3 Faisceaux constructibles et limites

Là encore, le dictionnaire entre faisceaux sur X_{et} et espaces algébriques étales sur X nous rapproche du cas des schémas.

Proposition 3.1 ([A] 2.7.2)**.** *Soient X un schéma quasi-séparé et F un faisceau sur X_{et}. Alors F est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles sur X.*

Démonstration. Soit $U \to F$ un recouvrement étale représentable, union disjointe de schémas affines U_i, $i \in I$, étales sur X. Le diagramme

$$R := U \times_F U \rightrightarrows U \to F$$

est exact. Pour tout $J \subseteq I$ fini, posons

$$U_J := \coprod_{j \in J} U_j \quad \text{et} \quad F_J := \operatorname{Im}(U_J) \subseteq F,$$

pour obtenir des diagrammes exacts

$$R_J := U_J \times_F U_J \rightrightarrows U_J \to F_J.$$

Comme U est limite inductive filtrante des U_J, le faisceau F est limite inductive filtrante des F_J. De plus, pour J fixé, le schéma R_J est limite inductive filtrante de ses ouverts quasi-compacts R'_J, de sorte que F_J est limite inductive filtrante des

$$C_{J,R'_J} := \operatorname{Coker}(R'_J \rightrightarrows U_J).$$

Par conséquent F est limite inductive filtrante des C_{J,R'_J} pour J et R'_J variables. Reste à voir que les X-espaces algébriques étales C_{J,R'_J} sont de présentation finie. Or X étant quasi-séparé, les schémas quasi-compacts U_J sont quasi-compacts sur X ([EGA IV] 1.2.4), donc les C_{J,R'_J} sont quasi-compacts sur X. De même les schémas R'_J sont quasi-compacts sur X. Puisque les U_J sont quasi-séparés sur X ([EGA IV] 1.2.3 (ii)), on en déduit que

$$\delta : R'_J \to U_J \times_X U_J$$

est quasi-compact. Finalement les C_{J,R'_J} sont bien de présentation finie sur X. □

Lorsque X est *localement noethérien*, la proposition 3.1 peut être précisée :

Proposition 3.2 ([A] 2.9 (iii))**.** *Soient X un schéma localement noethérien et F un faisceau sur X_{et}. Alors les sous-faisceaux constructibles de F forment un système inductif filtrant et F en est la limite.*

Démonstration. Soient C_1, C_2 des sous-faisceaux constructibles de F, recouverts par des X-schémas étales quasi-compacts V_1, V_2. Notons C_3 le sous-faisceau de F image du morphisme somme

$$V_1 \coprod V_2 \to F.$$

Comme X est localement noethérien, le X-espace algébrique étale C_3 est de présentation finie, autrement dit c'est un sous-faisceau constructible de F. De plus C_3 majore C_1 et C_2. Il en résulte que les sous-faisceaux constructibles de F forment un système inductif filtrant.

Ceci étant, reprenons les notations de la proposition 3.1. En particulier, le faisceau F est limite inductive filtrante des sous-faisceaux F_J. Mais puisqu'ici X est localement noethérien, les F_J sont déjà de présentation finie sur X. D'où le résultat. □

Signalons également la

Proposition 3.3 ([A] 2.7.4). *Soit $\{X_i\}$ un système projectif filtrant de schémas quasi-compacts quasi-séparés, dont les morphismes de transition sont affines.*

1. *Soient $\{F_i\}$ et $\{G_i\}$ des systèmes cartésiens compatibles de faisceaux constructibles sur $\{X_i\}$. Alors, posant $F := \varprojlim F_i$ et $G := \varprojlim G_i$, la flèche canonique*
$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{X_i}(F_i, G_i) \to \mathrm{Hom}_X(F, G)$$
est bijective.
2. *Pour tout faisceau constructible F sur X, il existe un i_0 et un faisceau constructible F_{i_0} sur X_{i_0} dont le pull-back sur X est isomorphe à F.*

On renvoit à [CLO] Prop. A.3.2 et A.3.4. pour une preuve détaillée (et un énoncé plus général).

4 Image directe par un morphisme fini

Théorème 4.1 ([A] Prop. 2.14). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, fini et de présentation finie. Soit F un faisceau constructible sur X. Alors son image directe f_*F est un faisceau constructible sur Y.*

Nous allons établir ce résultat comme conséquence d'une version faible du théorème de changement de base propre (qui sera étudié en toute généralité dans l'exposé (7)). La version faible que nous utiliserons est la suivante :

Théorème 4.2. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini et F un faisceau sur X_{et}. Alors pour tout diagramme cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

la flèche canonique $g^*f_*F \to f'_*g'^*F$ est un isomorphisme.

Démonstration. C'est une application directe du calcul de la fibre géométrique de l'image directe par un morphisme fini, vu dans l'exposé (2). □

4.1 Lemmes préliminaires

Etablissons deux lemmes qui nous seront utiles pour la preuve de 4.1.

Lemme 4.3 ([A] Prop. 2.4). *Soient X un schéma et F un faisceau sur X_{et}. Si F est constructible, alors pour tout $x \in X$, il existe un ouvert non-vide U de $\overline{\{x\}}$ tel que $F|_{\overline{\{x\}}_{\mathrm{red}}}$ soit localement constant sur U de valeur finie. La réciproque est vraie si X est localement noethérien.*

Démonstration. Supposons F constructible et montrons la propriété souhaitée. Pour cela, on peut supposer X affine. Soit $x \in X$. Il existe un sous-schéma Y de X passant par x et sur lequel F devient localement constant. Ecrivons $Y = V \cap Z$ avec V ouvert et Z fermé. Alors $U := V \cap \overline{\{x\}}$ est un ouvert non-vide convenable de $\overline{\{x\}}$. (On notera de plus que U étant connexe, le faisceau $F|_U$ n'a qu'une seule valeur locale.)

Supposons maintenant X localement noethérien, supposons que F vérifie la propriété de l'énoncé pour tout $x \in X$, et montrons que F est constructible. Là encore on peut supposer X affine. En appliquant l'hypothèse aux points maximaux de X (qui sont en nombre fini), on trouve un ouvert dense X_1 de X sur lequel F est localement constant de valeur finie. Puis on recommence avec les points maximaux du fermé $X \setminus X_1$. Comme X est noethérien, ce procédé stationne, et F est bien constructible sur X. $\square$

Lemme 4.4. *Soient Y un schéma intègre excellent, X un schéma intègre, $X \to Y$ un morphisme fini surjectif. Alors, quitte à remplacer Y par un ouvert non-vide, il existe une factorisation*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dd] \\ Y' \arrow[dr] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

avec $X \to Y'$ homéomorphisme universel et $Y' \to Y$ fini étale.

Démonstration. Comme X est excellent (car de type fini sur Y excellent) et intègre, son ouvert de normalité est non-vide. Son complémentaire est un fermé strict de X irréductible, dont l'image par $X \to Y$ fini est par conséquent un fermé strict de Y. Quitte à diminuer Y, on peut donc supposer X normal. Soit L/K l'extension des corps de fonctions induite par $X \to Y$, K'/K la sous-extension étale maximale de L/K et Y' le normalisé de Y dans K'. Comme X est normal, le morphisme $X \to Y$ se factorise par $Y' \to Y$.

Comme Y est excellent, la normalisation $Y' \to Y$ est finie. Elle est étale au-dessus d'un ouvert non-vide de Y, donc, quitte à diminuer Y, on peut supposer $Y' \to Y$ fini étale. D'autre part, le morphisme $X \to Y'$ est radiciel au-dessus d'un ouvert non-vide de Y' et $Y' \to Y$ est fini, donc, quitte à diminuer à nouveau Y, on peut supposer $X \to Y'$ radiciel. C'est un morphisme fini vu que $X \to Y$ et $Y' \to Y$ le sont, qui est dominant par construction. Par conséquent c'est un homéomorphisme universel ([EGA IV] 18.12.11). $\square$

Terminons ces préliminaires en rappelant l'équivalence des sites étales induite par un homéomorphisme.

Théorème 4.5 ([EGA IV] 18.1.2)**.** *Soit $X \to Y$ un morphisme de schémas, qui est un homéomorphisme. Alors la flèche correspondante $X_{et} \to Y_{et}$ est un isomorphisme de sites.*

Corollaire 4.6. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, qui est un homéomorphisme universel. Alors f_* est une équivalence de la catégorie des faisceaux étales sur X sur celle des faisceaux étales sur Y, de pseudo-inverse f^*, sous-laquelle se correspondent les faisceaux constants (resp. localement constants, resp. constructibles).*

Démonstration. En utilisant le calcul des germes pour un morphisme fini (exposé (2)), on vérifie tout de suite que les flèches d'adjonction sont des isomorphismes. En particulier, si F est constructible sur X, son image directe f_*F est constructible sur Y : en effet $f^*(f_*F)$ est constructible sur X et les homéomorphismes induisent des isomorphismes entre les petits sites étales. $\square$

4.2 Preuve du théorème 4.1

Par définition de la constructibilité de $f_* F$, on peut supposer Y affine. Ecrivant $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ comme limite inductive filtrante de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini, la version schématique de 5.6 ([EGA IV] 8) fournit un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X_{i_0} \arrow[r, "f_{i_0}"] & Y_{i_0} \end{tikzcd}$$

où f_{i_0} est un morphisme fini de schémas noethériens. En outre 5.6 assure que, quitte à changer i_0 par un $i > i_0$, on peut supposer que F provient d'un faisceau constructible sur X_{i_0}. Le théorème 4.2 (et 1.5 2) nous ramène(nt) alors au cas où Y est excellent (en particulier noethérien). De plus, quitte à remplacer Y par l'image schématique de f, on peut supposer f surjectif (on notera que le faisceau $f_* F$ est constant « à une feuille » en dehors du fermé $f(X)$).

Utilisons maintenant le critère du lemme 4.3. Soit $y \in Y$, posons $Z := \overline{\{y\}}_{\mathrm{red}}$, et vérifions que $(f_* F)|_Z$ est localement constant sur un ouvert dense de Z. Appliquant à nouveau 4.2, cette fois avec le changement de base $Z \to Y$, on est ramené au cas où Y est intègre excellent de point générique y. Ensuite, quitte à remplacer X par X_{red}, on peut supposer X réduit (lemme 4.6). Puis, comme F est constructible sur X et $X \to Y$ est fini, on peut supposer, quitte à diminuer à Y, que X est union disjointe d'ouverts intègres sur lesquels F est localement constant. Par somme directe, on est ramené au cas où X est intègre et F localement constant.

Après ces réductions, on peut appliquer le lemme 4.4, pour trouver une factorisation $X \to Y' \to Y$ avec $X \to Y'$ homéomorphisme universel et $Y' \to Y$ fini étale, quitte à diminuer à nouveau Y. Le lemme 4.5 assure que l'image directe de F sur Y' est un faisceau localement constant, ce qui nous ramène au cas où $X \to Y$ est un revêtement étale. Mais alors, après localisation étale de Y par la clôture galoisienne de X/Y, on est ramené au cas où $X \to Y$ est un revêtement étale totalement décomposé, et alors $f_* F$ est localement constant comme somme directe de localement constants. (Remarque : l'argument précédent fournit un cas trivial de représentabilité d'une restriction à la Weil).

5 Faisceaux abéliens constructibles

On va maintenant énoncer les analogues des résultats précédents, quand on remplace la catégorie des ensembles par celle des groupes abéliens.

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1 (Faisceau abélien constructible)**.** *Soient X un schéma et F un faisceau abélien sur X_{et}. On dit que F est* constructible *sur X s'il est constructible en temps que faisceau d'ensembles.*

Cette définition correspond à la notion de *faisceau de groupes constructible* de [A], dans le cas où on se restreint aux faisceaux de groupes abéliens. On prendra garde au fait qu'il existe aussi une notion de *faisceau de A-modules constructible*, pour A anneau commutatif, et qui *ne* coïncide *pas* en général avec la notion ci-dessus lorsque l'on prend $A = \mathbb{Z}$. Les deux notions coïncident cependant lorsque l'on se restreint aux faisceaux à fibres finies.

Proposition 5.2 ([A] Prop. 2.6)**.** *Soit X un schéma. La catégorie des faisceaux abéliens constructibles sur X est abélienne.*

5.2 Faisceaux de torsion

Les faisceaux que l'on pourra approcher par des faisceaux abéliens constructibles sont les faisceaux *de torsion*, que l'on définit maintenant.

Etant donnés un schéma X, un faisceau abélien F sur X_{et}, et un entier n, on note ${}_nF$ le noyau de la multiplication par n dans F.

Définition 5.3 ([A] 1.1 et 1.2 (iii))**.** *Soient X un schéma et F un faisceau abélien sur X_{et}. On dit que F est un faisceau* de torsion sur X *si le morphisme canonique de faisceaux*

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} {}_nF \to F$$

est un isomorphisme. De façon équivalente, le faisceau F est de torsion sur X si pour tout objet quasi-compact U de X_{et}, le groupe abélien $F(U)$ est de torsion.

Pour les exposés ultérieurs (notamment (8)), signalons au passage la

Proposition 5.4 ([A] 1.2 (iv) et (v))**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.*

1. *Si G est un faisceau de torsion sur Y, alors f^*G est un faisceau de torsion sur X.*
2. *Supposons f quasi-compact quasi-séparé. Si F est un faisceau de torsion sur X, alors R^qf_*F est un faisceau de torsion sur Y pour tout $q \geq 0$.*

Démonstration. Le premier point résulte facilement des définitions. Le second point provient du fait que les R^qf_* commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens (lorsque f est quasi-compact quasi-séparé), [GV] Th. 5.1. □

5.3 Limites

Proposition 5.5 ([A] 2.7.2)**.** *Soient X un schéma quasi-compact*[2] *quasi-séparé et F un faisceau de torsion sur X_{et}. Alors F est limite inductive filtrante de faisceaux de torsion constructibles sur X.*

Lorsque X est noethérien[3], le faisceau de torsion F est même limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux abéliens constructibles ([A] 2.9 (iii)).

Proposition 5.6 ([A] 2.7.4)**.** *Soit $\{X_i\}$ un système projectif filtrant de schémas quasi-compacts quasis-séparés, dont les morphismes de transition sont affines.*

1. *Soient $\{F_i\}$ et $\{G_i\}$ des systèmes cartésiens compatibles de faisceaux de torsion constructibles sur $\{X_i\}$. Alors, posant, $F := \varprojlim F_i$ et $G := \varprojlim G_i$, la flèche canonique*

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{X_i-\mathrm{grp}}(F_i, G_i) \to \mathrm{Hom}_{X-\mathrm{grp}}(F, G)$$

est bijective.

2. *Pour tout faisceau de torsion constructible F sur X, il existe un i_0 et un faisceau de torsion constructible F_{i_0} sur X_{i_0} dont le pull-back sur X est isomorphe à F.*

2. Comme on ne fournit pas de démonstration, on reproduit ici les hypothèses de [A] 2.7.1. On notera cependant que dans la preuve du cas ensembliste donnée en 3.1, l'hypothèse de quasi-compacité sur X n'a pas été utilisée.

3. Là encore, on reproduit l'hypothèse de quasi-compacité sur X de [A] 2.9 (iii), bien que celle-ci n'ait pas servie dans la preuve du cas ensembliste 3.2.

Références

[A] M. Artin, *Faisceaux constructibles, Cohomologie d'une courbe algébrique*, SGA4 Fasc. 3 Exp. IX.

[ALB] M. Artin, A. Lascu, J.-F. Boutot, *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*, Presses de l'Université de Montréal, 1973.

[CLO] B. Conrad, M. Lieblich, M. Olsson, *Nagata compactification for algebraic spaces*, disponible sur la page web de Brian Conrad.

[EGA I] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Le langage des schémas*, Publ. Math. IHES **4** (1960).

[EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. IHES **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[GV] A. Grothendieck, J.-L. Vervier, *Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite*, SGA4 Fasc. 2 Exp.VI.

[K] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lect. Notes Math. **203**, Springer, Heidelberg, 1971.

[M] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1980.

[RG] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1-89.