Sujet 2 : Programmation linéaire: applications et propriétés

MHT 423 :
Modèles et méthodes d'optimisation

Andrew J. Miller
Dernière mise à jour: March 10, 2010

Dans ce sujet...

1. Application : problème diététique
2. Application : planification de production multi-période
3. Quand est-ce on peut modéliser une application avec la programmation linéaire
4. Solutions optimales

Description

On a des besoins hebdomaires pour les nutriments suivants :

- calcium (10 g)
- fer (70 mg)
- glucides complexes (2000 g)
- protéines (600 g)

On peut choisir entre des aliments suivants :

- fruit (2 euros / portion)
- lait (1 euro / portion)
- pain (1 euro / portion)
- viande (5 euros / portion)

Le but est de trouver une régime qui fournit les nutriments nécessaires au prix minimum.
Pour une version beaucoup plus réeliste de ce probème, voir `http://www-neos.mcs.anl.gov/CaseStudies/dietpy/WebForms/index.html`

Description

Chaque aliment contient les nutriments suivants :

	fruit	lait	pain	viande
calcium	0 mg	1 g	0 mg	0.1 g
fer	1 mg	0 mg	2 mg	9.9 g
glucides complexes	200 g	0 g	100 g	0 g
protéines	0 g	10 g	0 g	100 g

Formulation

Indices :

- nutriments $1, \ldots, m$
- aliments $1, \ldots, n$

Données :

- coûts unitaires $c_j, j = 1, \ldots, n$ (euros/portion)
- besoins hebdomadaires $b_i, i = 1, \ldots, m$ (en grammes pour $j = 1, 2, 4$; en milligrammes pour $j = 3$ — fer)
- quantité de chaque nutriment i contenue par une portion de nutriment j

  a_{ij}, pour $i = 1, \ldots, 4$ et pour $j = 1, \ldots, 4$

  (En grammes par portions portion, sauf quand $i = 3$. Dans ce dernier cas, en milligrammes par portion.)

Formulation (suite)

Variables

- $x_j, j = 1, ..., 4$: quantité de portions à consommer chaque semaine
  Notez bien que chaque variable doit être non-negative :
  $x_j \geq 0, j = 1, ..., 4.$

Objectif

- $\sum_{j=1}^{4} c_j x_j = 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4$
  Il faut *minimiser* cette fonction.

Contraintes

- Il existe une contrainte pour chaque nutriment. On peut exprimer ces contraintes dans le format général
  $\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i$, pour $i = 1, ..., 4.$
  (Les côtés gauche et droit de chaque contrainte s'expriment en **grammes**, sauf pour la troisième contrainte (cela associé au fer). Pour $i = 3$, la contrainte s'expriment en **milligrammes**.)

Formulation algébrique complète

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \\
\text{s.à} \quad & \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \ldots, 4 \\
& x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \\
\text{s.à} \quad & x_2 + 0.1x_4 \geq 10 \\
& x_1 + 2x_3 + 9.9x_4 \geq 70 \\
& 200x_1 + 100x_3 \geq 2000 \\
& 10x_2 + 100x_4 \geq 600 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

A noter

Les deux formulations sont exactement la même. La seule différence, c'est qu'on emploie la notation symbolique au lieu des nombres explicites dans la première version.

Remarquez aussi qu'il serait très difficile, voire impossible, de trouver la solution optimale manuellement.

1. Application : problème diététique
2. Application : planification de production multi-période
3. Quand est-ce on peut modéliser une application avec la programmation linéaire
4. Solutions optimales

Description

Une entreprise a envie à faire un planifier globalement ses opérations pendant les prochaines six mois.

Il s'agit de determiner les niveaux de production dans chacun des prochaines six mois, compte tenu des coûts de production (qui change de mois en mois), des coûts de stockage, de la capacité de stockage, et surtout des demandes.

Il faut absolument satisfaire à toutes les demandes; donc il faut que la somme de la quantité de stock disponible au debut du mois et de la quantité de production pendant le mois soit supérieure à ou égale à la demande du mois. Si cette somme est supérieure á la demande, il faut garder la différence en stock à la fin du mois.

Le but est de satisfaire les demandes et la capacités en **minimisant** la somme des coûts impliqués.

Indices et Données

Le seul indice nécessaire, c'est l'ensemble des mois : $t = 1, \ldots, 6$.
Données

- demandes $D_t, t = 1, \ldots, 6$
  [1300, 1400, 1000, 800, 1700, 1900]
- coûts unitaires de production $C_t, t = 1, \ldots, 6$
  [100, 105, 110, 115, 110, 110]
- coût unitaire de stock: $H = 4$
- stock initial : $s_0 = 200$; stock terminal : $s_6 = 100$
- capacité de stock $K = 250$

Variables

- $x_t, \ t = 1, ..., 6$: quantité de production pendant mois t
- $s_t, \ t = 1, ..., 5$: quantité de stock gardé à la fin de mois t

Formulation (suite)

Objectif

- Le somme des coûts : il faut le minimiser.

Contraintes

- balance inventaire :
- capacité de stock :

Formulation complète

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{6} C_t x_t + \sum_{t=1}^{5} H s_t \\
\text{s. à} \quad & x_1 + s_0 = D_1 + s_1 \\
& x_t + s_{t-1} = D_t + s_t, t = 2, ..., 5 \\
& x_6 + s_5 = D_6 + s_6 \\
& s_t \leq K, t = 1, ..., 5 \\
& x_t \geq 0, t = 1, ..., 6; s_t \geq 0, t = 1, ..., 5
\end{aligned}
$$

La linéairité

Comment est-ce qu'on peut savoir si une situation peut être modélisée par des fonctions linéaires?

Si les activités sont

- additives
- proportionnelles
- divisibles

Additive

L'effet d'un ensemble d'activités peut être calculé en additionnant les effets qui arriverait si on faisait chaque activité toute seule.

Proportionnelle

Si on augmente une activité deux fois, l'effet de cette activité va aussi augmenter deux fois.

Divisible

La nature d'une activé est telle qu'on peut faire n'importe quel niveau possible d'une activité entre des bornes inférieures et supérieures.

Formulation générale

Soient $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Deux formulations équivalentes :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.à.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{s.à.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Trois possibilités

Un programme linéaire peut tomber dans un des trois cas suivants :

- Le problème est irréalisable.
- Le problème est non-borné.
- Le problème peut avoir une ou plusieurs solutions optimales.

Exemple d'un problème irréalisable

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.à} \quad & -x_1 \leq -2 \\
& -x_2 \leq -1 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple d'un problème non-borné

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solutions optimales : unique ou infinies

Si une solution optimale existe,

1. soit la solution optimale est unique; ou
2. soit il existe un ensemble infini des solutions optimales.

Exemple d'un problème qui a un ensemble infini d'optima

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A souvenir

- Exemples de modèlisation
- Principes de modélisation :
  - La différence entre indices/données et variables/contraintes/objectif
  - cohérence des unités de mesure
- Les définitions de additive, proportionnelle, et divisible par rapport à la modélisation des activités par variables dans la programmation linéaire
- Propriétés des programmes linéaires :
  - Chaque programme linéaire soit 1) est irréalisable, soit 2) est non-borné, soit 3) a une solution optimale.
  - Si un programme linéaire a une solution optimale, alors il a soit une solution optimale unique, soit un nombre infini de solutions optimales.