Sujet 3: Programmation linéaire : interpretation géometrique

MHT 423 :
Modèles et méthodes d'optimisation

Andrew J. Miller
Dernière mise à jour: March 3, 2010

Dans ce sujet...

Un exemple modifié

Nous considérons un exemple du genre Monet, mais modifié de contenir seulement deux espèces de cadres-photos (alors deux variables différentes) et deux ressources (alors deux contraintes).

Exemple de deux dimensions

Considérons un exemple avec seulement deux types de cadres-photos, et qui n'a des contraintes de ressources que pour la main d'œuvre et du verre.

Voilà une formulation:

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1.9x_1 + 2.6x_2 \\
\text{s.à.} & 2x_1 + x_2 \leq 4000 \text{ (main d'œuvre)} \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 5000 \text{ (verre)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

La motivation de considérer un tel exemple est qu'on peut visualiser l'espace des solutions réalisables, en affectant une dimension à chaque variable.

Contraintes

Dans deux dimensions, les points qui satisfont à un contrainte à égalité compose une ligne.

Si la contrainte est une inégalité, alors l'ensemble des points qui y satisfait est l'ensemble qui se situe de l'un cotê oû de l'autre de cette inégalité, dépendant de son sens.

Alors, pour chaque contrainte il existe un semble de points qui y satisfait. L'espace réalisable est l'intersection de ces ensembles sur toutes les contraintes.

Implication : Si l'espace réalisable est borné, elle est définie par un polygone.

Fonction objective

On peut concevoir la fonction objective dans deux senses, qui sont enfin équivalentes :

- L'ensemble des points pour lesquelles la fonction objective a la même valeur est défini par une ligne. Pour trouver la solution optimale, il faut déplacer cette ligne d'une manière parallèle à travers de l'espace réalisable aussi loin que possible.
- La fonction objective définit une direction. Pour trouver la solution optimale, il faut aller dans cette direction et dans ce sens aussi loin que possible dans l'espace réalisable.

A noter : La direction décrite dans la deuxième conception est orthogonale à chaque ligne décrite dans la première.

Points extrèmes

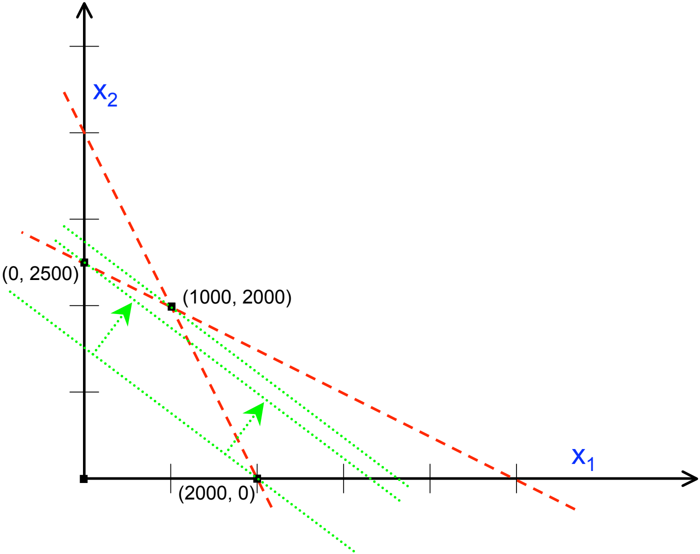
Si l'intersection de deux contraintes est réalisable, elle définit un point extrème de l'espace réalisable.

Theorem

S'il existe une solution optimale d'un programme linéaire, au moins une solution optimale se trouve à un point extrème de l'espace réalisable.

Si un programme dans deux dimensions est borné, pour trouver la solution optimale, il suffit de énumérer les points extrèmes de comparer les valeurs de la fonction objective définies par ces points.

Exemple (suite)



Contraintes

L'ensemble des points qui satisfaient à une contrainte avec égalité est toujours un hyper-plan, dont la dimension est $n - 1$.

Si la contrainte est une inégalité, alors l'ensemble de points qui y satisfaient se trouve de l'un côté ou de l'autre de cet hyper-plan. On appelle cet ensemble une demi-espace.

L'espace réalisable du problème est l'intersection des ensembles des points qui satisfaient à chaque contrainte. Si toutes les contraintes sont des inégalités, cette intersection est bien une intersection des demi-espaces

Fonction objective

- L'ensemble des points pour lesquelles la fonction objective a la même valeur est défini par un hyper-plan. Pour trouver la solution optimale, il faut déplacer cet hyper-plan d'une manière orthogonale à travers de l'espace réalisable aussi loin que possible.
- La fonction objective définit une direction. Pour trouver la solution optimale, il faut aller dans cette direction et dans ce sens aussi loin que possible dans l'espace réalisable.

La direction dans la deuxième explication est bien la direction orthogonale à chaque hyper-plan dans la première.

Points extrèmes

Si l'intersection de n contraintes est réalisable, elle définit un point extrème de l'espace réalisable.

Theorem

S'il existe une solution optimale d'un programme linéaire, au moins une solution optimale se trouve à un point extrème de l'espace réalisable.

Normalement, il y un nombre exponentiel des point extrèmes, donc on peut espérer à les énumerer tous.

Pourtant, le méthode le plus utilisé pour résoudre des programmes linéaires, l'algorithme de simplexe, parcourt des points extremès adjacents jusqu'a ce qu'il trouve le meilleur.

Points extrêmes

Comment est-ce que l'algorithme de simplexe (ou n'importe quel autre méthode) peut réconnaitre qu'une solution est optimale?

Si une solution n'est pas optimale, comment est-ce qu'on peut l'améliorer?

Pour répondre à ces questions, il faut comprendre la dualité.

Pour pratiquer

Essayer de résoudre, en appliquant l'interpretation géométrique, des autres exemples avec deux variables qui se trouvent dans les transparents.

A souvenir

- L'espace réalisable d'un programme linéaire est toujours un polyèdre.
- Une solution optimale se trouve toujours à un point extrème d'un polyèdre.
- La méthode de simplexe procède d'un point extrème à un autre.